

Fondements de la méthode des éléments finis

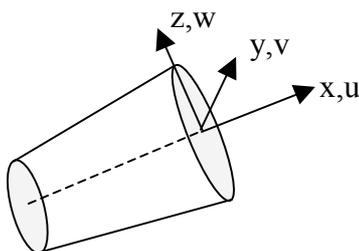
Les 4 principales étapes de la MEF sont :

- 1) La division du solide étudié en morceaux de taille finie ou éléments finis qui définissent le **maillage**.
- 2) Dans chaque élément l'approximation du champ inconnu (ici les déplacements) par **une approximation polynomiale nodale**.
- 3) Le calcul du travail virtuel des efforts internes et externes dans chaque élément fini.
- 4) L'assemblage de la structure ce qui signifie l'expression de son **équilibre** et la résolution de ce problème d'équilibre en fonction des inconnues nodales .

1

Considérations géométriques et mécaniques vont souvent de pair; si une structure est élancée on peut penser la modéliser en poutres ou en plaques.

Une *poutre* est une structure dans laquelle une *dimension* celle de l'axe est prédominante, on estime alors que la connaissance de ce qui se passe dans les 2 autres dimensions peut être moyenné : $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$. La section droite de la poutre reste plane et ne sont considérées que ses rotations autour des axes d'inertie.



Caractéristiques d'une poutre :

Les axes locaux Ox , Oy sont axes principaux d'inertie. O est le centre de gravité de la section.

$$S = S(x)$$

Les contraintes dans la section sont constantes et représentées par des efforts équivalents.

Précisément on a, dans les axes locaux, superposition des effets de traction-compression définis à partir de $u = u(x)$, des effets de torsion définis à partir de la rotation de la section droite autour de Ox et des effets de flexion définis par les déplacements $v(x)$ et $w(x)$ ainsi que des rotations β_z et β_y autour de Oy et Oz de cette même section.

Etape 1

Le maillage par éléments finis

La structure est divisée en morceaux ; le nombre, les dimensions, la nature de ces morceaux sont déterminés par des considérations à la fois mécaniques et géométriques. Il y a pas mal de savoir faire dans l'élaboration d'un bon maillage, option essentielle pour de 'bons résultats'.

Choisir **le nombre et la répartition** des EF n'est pas facile:

Une remarque générale de bon sens : il faut des éléments finis là où il se passe quelque chose (c'est-à-dire là où les contraintes varient beaucoup), mais les endroits où il se passe quelque chose ne sont pas toujours faciles à déterminer a priori.

Choisir **le type** d'élément fini n'est pas non plus toujours facile. Le type d'élément fini définit la ou les hypothèse(s) retenue(s) pour représenter les déplacements.

Tous les exemples proposés dans ce cours aborderont cette question.

2

Etape 2

Approximation nodale dans un EF

Dans un EF les inconnues – ici les déplacements – sont interpolés à l'aide de polynômes dont les coefficients sont obtenus à partir de valeurs prises sur le bord ou à l'intérieur de l'élément en des points appelés points nodaux qui généralement sont aussi les nœuds géométriques du maillage.

Exemple 1: L'approximation nodale linéaire dépendant d'une seule inconnue x

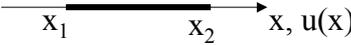
Soit $u(x)$ le déplacement dans l'élément fini 1-2 défini par les nœuds 1: $x = x_1$ et 2: $x = x_2$.

$$u = ax + b$$

est l'approximation linéaire de u ; elle n'est pas nodale.

$$u = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} u_1 + \frac{-x+x_1}{x_1-x_2} u_2$$

est l'approximation nodale; en effet u vaut u_1 valeur de u au point 1 et u_2 au point 2. 1 et 2 sont les nœuds de l'EF.

On écrit aussi, 

$$u = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2$$

N_1 et N_2 sont appelées fonctions de forme avec les propriétés

$$N_1(x_1) = 1, N_1(x_2) = 0 \dots$$

2 remarques fondamentales :

- Cette approximation n'est valable que dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.
- La position des points 1 et 2 aux bornes de l'intervalle est nécessaire pour assurer la continuité de la fonction u quand on passe d'un élément à un autre.

La même approximation peut être formulée en utilisant une formulation 'paramétrique' c'est-à-dire une variable auxiliaire s définie sur $[0, 1]$:

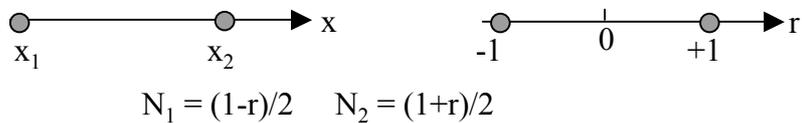
$$u = N_1(r)u_1 + N_2(r)u_2, \quad N_1(s) = 1-r, N_2(s) = r$$

$$x = (1-r) x_1 + r x_2 \quad \text{ou} \quad x = N_1(r) x_1 + N_2(r) x_2$$

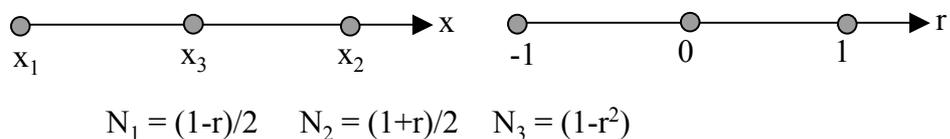
Il est remarquable d'observer que ce sont les mêmes fonctions N_1 et N_2 qui assurent la description de la variation de u et le 'transport' de l'intervalle $[x_1, x_2]$ dans l'intervalle $[0, 1]$. Formulation dite 'isoparamétrique'.

4

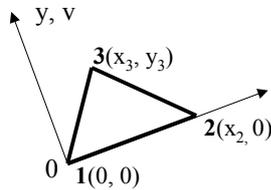
- On peut aussi utiliser la variable s sur l'intervalle $(-1, +1)$



- Si les nœuds définissant l'approximation sont à l'intérieur du domaine de l'élément alors pour assurer la continuité il faut que la fonction de forme associée soit nulle aux bornes ou à la frontière.



Exemple 2: approximation nodale linéaire à 2 variables



Dans le système local de coordonnées ci-contre nous considérons le triangle 1, 2, 3 dans lequel les déplacements u and v sont des fonctions de (x,y) . Nous allons construire leur *approximation nodale bilinéaire uniquement valable dans le triangle*.

$$u (/v) = a_0(/b_0) + a_1 (/b_1)x + a_2 (/b_2)y$$

est l'approximation polynomiale classique.

L'approximation nodale bilinéaire se construit sur les valeurs de u (ou de v) u_1, u_2, u_3 aux noeuds 1, 2, 3.

$$u = u_1 \left(1 - \frac{x}{x_2} - \frac{x_3 y}{x_2 y_3} - \frac{y}{y_3} \right) + u_2 \left(\frac{x}{x_2} - \frac{x_3 y}{x_2 y_3} \right) + u_3 \left(\frac{y}{y_3} \right)$$

ou,

$$u = N_1(x,y)u_1 + N_2(x,y)u_2 + N_3(x,y)u_3$$

Des résultats identiques sont obtenus pour v avec v_1, \dots à la place de u_1, \dots

5

Les fonctions de forme *de l'élément k* (en dehors de cet élément elles sont identiquement nulles) valent 1 au nœud considéré et 0 aux autres nœuds comme indiqué ci dessus; ainsi entre les nœuds 2-3 du triangle l'équation de la droite 2-3 est vérifiée soit:

$$y = \frac{-y_3}{x_2 - x_3} (x - x_2)$$

Ce n'est autre que l'équation $N_1 = 0$. En remplaçant y par sa valeur dans l'expression de u on obtient,

$$u = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} u_2 + \frac{-(x - x_2)}{x_2 - x_3} u_3$$

qui représente une variation ne dépendant que de u_2 et u_3 . On comprend ainsi que la continuité du champ u soit automatiquement assurée.

On comprend aussi que s'il existe des nœuds intérieurs à un élément il est nécessaire que les fonctions de forme associées soient nulles sur le contour.

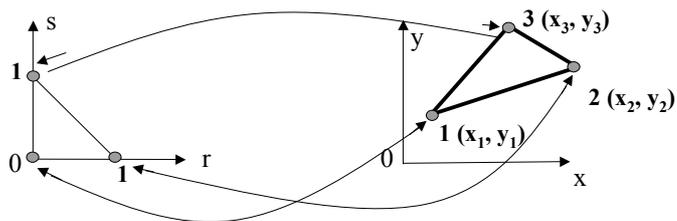
La fonction N_i prend la valeur 1 au nœud i et 0 aux autres.

Si les variables paramétriques r et s sont utilisées,

$$N_1 = 1 - r - s, \quad N_2 = r, \quad N_3 = s, \quad r, s \in [0, 1]$$

$$u/v = N_1(r,s)u_1/v_1 + N_2(r,s)u_2/v_2 + N_3(r,s)u_3/v_3$$

$$x/y = N_1(r,s)x_1/y_1 + N_2(r,s)x_2/y_2 + N_3(r,s)x_3/y_3$$



Il n'est pas difficile de vérifier la continuité inter-élément parce que les valeurs de u et v sur les côtés sont données par les valeurs nodales des nœuds du côté. (linéaire \leftrightarrow 2 nœuds, voir commentaires)

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_i \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n_i} \\ \mathbf{v}_{n_i} \end{pmatrix} = |\mathbf{N}^{(e=1)}| \bar{\mathbf{u}}^{(e=1)}$$

d'où l'on déduit pour l'exemple considéré, (par la suite l'indice de l'élément est omis),

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_1^4 (\mathbf{N}_{i,r} r_{,x} + \mathbf{N}_{i,s} s_{,x}) \mathbf{u}_{n_i} \\ \sum_1^4 (\mathbf{N}_{i,r} r_{,y} + \mathbf{N}_{i,s} s_{,y}) \mathbf{v}_{n_i} \\ \sum_1^4 (\mathbf{N}_{i,r} r_{,y} + \mathbf{N}_{i,s} s_{,y}) \mathbf{u}_{n_i} \\ \sum_1^4 (\mathbf{N}_{i,r} r_{,x} + \mathbf{N}_{i,s} s_{,x}) \mathbf{v}_{n_i} \end{pmatrix} = |\partial \mathbf{N}| \bar{\mathbf{u}}_{n_i}$$

L'expression à établir pour les déformations virtuelles est identique à celle ci-dessus en changeant simplement \mathbf{u} en \mathbf{u}^* .

Les contraintes sont linéairement reliées aux déplacements par la relation avec C matrice des coefficients élastiques du matériau $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Etape 3

Assemblage. Equilibre

Travail virtuel interne (ou des contraintes)

Le travail virtuel interne par unité de volume s'écrit,

$$\bar{\sigma}^T \bar{\epsilon}^* = \bar{\epsilon}^T |C| \bar{\epsilon}^* = \bar{u}_{n_i}^T |\partial N|^T |C| |\partial N| \bar{u}_{n_i}^*$$

L'intégration sur la longueur, la surface ou le volume de l'élément, - selon que celui-ci est un élément 1D, 2D, 3D - se fait en tenant compte que les fonctions de forme sont des fonctions de r ou de r, s, ou de r, s, t.

Il vient, pour un problème 1D par exemple, dans lequel la variable réduite r varie de -1 à +1 :

$$T_{int}^* = \bar{u}_{n_i}^T \left(\int_{-1}^1 |\partial N|^T |C| |\partial N| \det|J| dr \right) \bar{u}_{n_i}^*$$

L'intégrale simple devient double ou triple pour des problèmes 2D ou 3D.

Rq : l'utilisation de variables réduites laisse les bornes inchangées quel que soit l'élément envisagé ce qui est une remarque importante pour l'intégration. 8

L'intégrale qui donne le calcul du travail virtuel interne dans un élément dépend du degré des fonctions de forme et de la valeur du déterminant J.

Les bornes par contre sont soit (0, 1) ou (-1, 1) que cela soit en r, ou en r, s ou en r, s, t.

Comme on le verra dans les exemples les termes à intégrer peuvent être complexes et/ou ne pas pouvoir être obtenus sans fixer la valeur de r, s et t.

La conséquence c'est que l'intégrale est calculée par une méthode numérique dite de Gauss qui consiste à trouver sa valeur à partir d'une somme pondérée (poids w_{ng}) des valeurs que prend la fonction intégrée en des points dits points de Gauss ($r = r_{ng} \dots$), soit par exemple en 1D :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x(r)) \det J dr = \int_{-1}^1 g(r) dr = \sum_1^{N_g} w_{n_g} g(r_{n_g})$$

Le nombre des points de Gauss à retenir est fonction du degré des monômes sous le signe \int .

On désigne par K_e la matrice de raideur de l'élément,

$$|K_e| = \int_{-1}^1 |\partial N|^T |C| |\partial N| \det |J| dr$$

On a donc

$$T_{int}^* = \bar{\mathbf{u}}_{n_i}^{*(e)T} |K_e| \bar{\mathbf{u}}_{n_i}^{*(e)}$$

K_e est une matrice symétrique qui est singulière car il y a des déplacements nodaux (translations et rotations rigides) auxquels ne correspond aucun travail car les déformations associées à ces déplacements sont nulles.

Le travail virtuel total des efforts internes dans la structure est la somme des travaux virtuels dans chaque élément.

$$T_{int}^* = \sum_{\text{éléments}} T_{int}^{*(e)}$$

Cette sommation qui doit s'effectuer dans un système d'axes globaux exprime 2 choses importantes :

- a) Les déplacements des nœuds communs à plusieurs éléments sont identiques.
- b) La somme des forces nodales provenant des efforts internes est égale à l'effort extérieur (ou à 0 s'il n'y a pas d'effort).

9

Si la matrice de raideur de l'élément a été construite dans un système d'axes locaux, il est nécessaire de la projeter dans un système global pour l'associer aux autres.

Dans ce cas on doit effectuer les produits matriciels : $\Phi^T K_e \Phi$ où Φ est la matrice de changement de repère local → global.

La sommation ou *assemblage* conduit à la forme générale,

$$\mathbf{T}_{int}^* = \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}^*$$

$\bar{\mathbf{u}}$ est un vecteur qui regroupe tous les degrés de liberté de tous les nœuds du maillage. \mathbf{K} est la matrice raideur de la structure. Cette matrice est symétrique et singulière tant que les conditions limites n'ont pas été appliquées. Elle a une structure dite 'bande' en ce sens que ses termes sont généralement regroupés autour de la diagonale, diagonale elle-même constituée de termes strictement positifs.

Travail virtuel des efforts externes

Ce calcul du dépend de la nature des efforts.

a) **Effort ponctuel** : il suffit de mettre un nœud là où l'effort est appliqué et le travail est alors le produit scalaire du vecteur effort et du vecteur 'déplacement' virtuel.

b) **Effort distribué** (sur une ligne ou une surface ou dans un volume) : l'effort est réparti sur les nœuds. Le plus usuel est d'utiliser dans chaque élément l'approximation nodale du déplacement et de calculer le travail virtuel correspondant produit par l'effort.

10

Les termes diagonaux d'une matrice raideur sont positifs car ils représentent physiquement une raideur.

Etant donné que les lignes et colonnes de la matrice \mathbf{K} sont associées à des degrés de liberté de déplacement des nœuds et qu'un nœud i n'est en relation directe qu'avec ses voisins (au sens géométrique) au travers de son appartenance à des éléments, le nombre des liaisons entre i et les autres degrés de liberté est fini. Si les numéros de ces nœuds voisins sont proches de i alors les termes k_{ij} sont dans le voisinage de la diagonale. On pourra constater dans \mathbf{K} que la plus grande 'distance' entre 2 termes est égale à $(d_{ne} + 1) \times ddl_n$

d_{ne} : plus grande différence de numérotation des nœuds d'un élément.

ddl_n : nombre de degrés de liberté par nœud.

Efforts nodaux équivalents à un effort distribué: exemple.

On considère une poutre en flexion soumise à une pression distribuée sur toute sa longueur. L'épaisseur de la poutre est unitaire.

Les fonctions de forme de l'élément fini associé (voir le chapitre correspondant) sont les suivantes (longueur de l'élément L) :

Finalement après cette discrétisation le travail virtuel des efforts extérieurs prend la forme générale,

$$T_{\text{ext}}^* = \vec{f}_{\text{eq}}^T \vec{u}^*$$

Equilibre

La somme des travaux virtuels interne et externe est nulle ce qui donne,

$$(\vec{u}^T |K| - \vec{f}_{\text{eq}}^T) \vec{u}^* = 0$$

Conditions limites

Elles doivent s'exprimer sur les déplacements (réels et virtuels) seulement puisque ce sont les seules inconnues du problème.

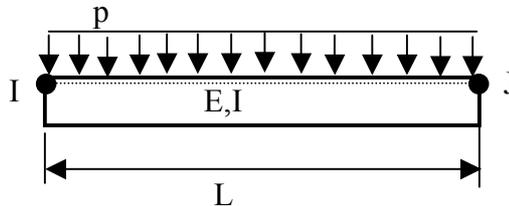
Ces conditions sont imposées aux nœuds : elles sont donc du type,

$$u_{n_c} = u_0 \rightarrow u_{n_c}^* = 0$$

On les applique en supprimant les lignes correspondant à $u_{n_c}^* = 0$ et en modifiant le vecteur des forces appliquées (ligne j retrancher $k_{n_c j} u_0$).

11

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}, N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, N_4 = \frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2},$$



Les degrés de liberté associés aux nœuds I et J sont la flèche w et la rotation de la section droite θ , c'est-à-dire que : $w = N_1 w_1 + N_2 \theta_1 + N_3 w_2 + N_4 \theta_2$

Le travail virtuel associé est :

$$T^* = \int_0^L p w^* dx$$

En utilisant l'expression virtuelle EF de w , il vient par remplacement sous le signe \int

$$T^* = \frac{pL}{2} w_1 + \frac{pL^2}{12} \theta_1 + \frac{pL}{2} w_2 - \frac{pL^2}{12} \theta_2$$

Les efforts nodaux équivalents sont donc une force $pl/2$ et un moment $\pm pL^2/12$.

Solution

L'équilibre doit être vérifié quelque soit le champ \mathbf{u}^* :

$$|\mathbf{K}| \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}}_{\text{eq}}^T$$

L'application des conditions limites a rendu \mathbf{K} non singulière donc

$$\bar{\mathbf{u}} = |\mathbf{K}|^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{\text{eq}}^T \rightarrow \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = |\partial \mathbf{N}| \bar{\mathbf{u}} \rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}} = |\mathbf{C}| |\partial \mathbf{N}| \bar{\mathbf{u}}$$

La théorie montre qu'il est conseillé de calculer les contraintes non aux nœuds où elles ne sont pas continues d'un élément à l'autre mais aux points de Gauss de l'élément (voir les commentaires pour la définition de ces points).

Remarque : pour un EF les efforts internes nodaux sont définis à partir du travail virtuel interne par :

$$\int_{V_e} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*(e)T} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)} dV_e = \bar{\mathbf{u}}_n^{*(e)T} \int_{V_e} |\partial \mathbf{N}|^T \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV_e = \bar{\mathbf{u}}_n^{*(e)T} \mathbf{f}_{\text{int}}^{(e)}$$