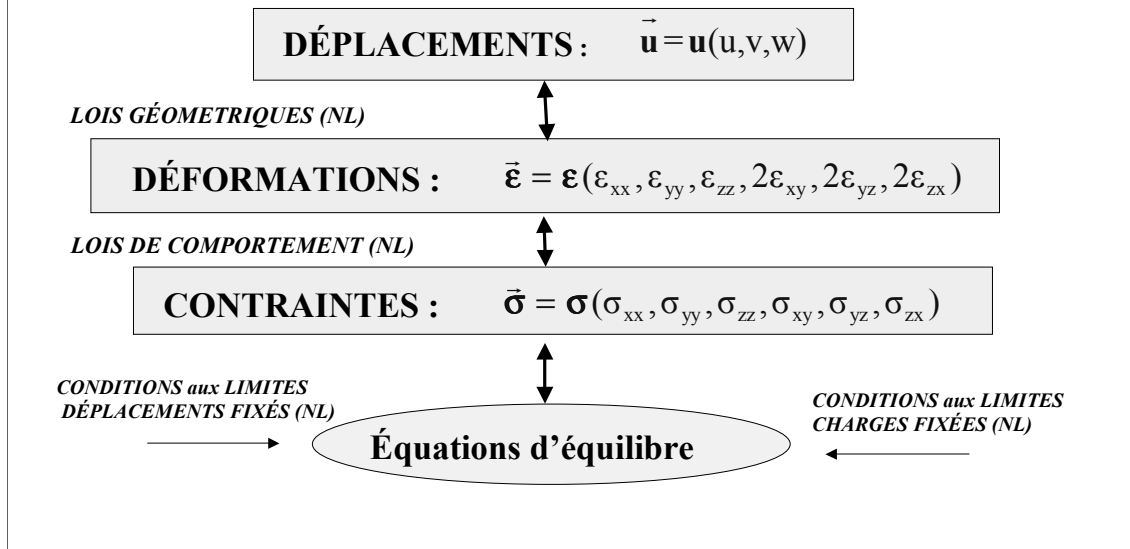


RAPPELS d'ÉLASTICITÉ

**DÉPLACEMENTS
DÉFORMATIONS
CONTRAINTES**

ÉQUILIBRE GLOBAL

FONDEMENTS d'une ANALYSE STATIQUE



Les déplacements en 1 point sont définis par un vecteur à 3 ou 6 composantes (6 dans le cas où les rotations sont prises en compte).

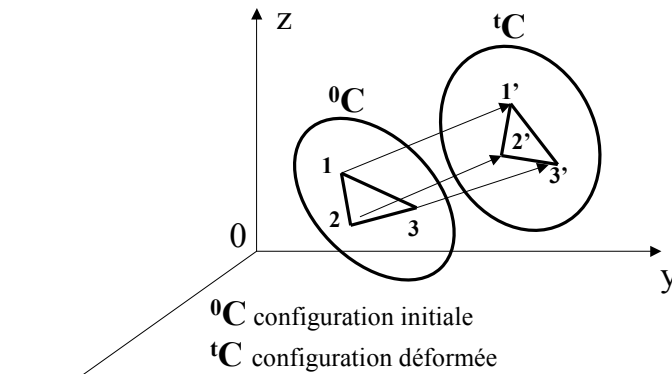
Les déformations et les rotations en 1 point sont définies par des matrices symétriques. Il y a donc 6 inconnues en ϵ et 6 en σ . Dans la MEF on les range dans des vecteurs. Les déformations de cisaillement apparaissent avec le facteur 2 pour avoir un travail (produit scalaire $\sigma^T \cdot \epsilon$) qui tienne compte de la symétrie $\sigma_{ji} \epsilon_{ji} = \epsilon_{ij} \sigma_{ij}$.

Au total en élasticité il y a donc de 9 à 12 inconnues spatiales.

La solution théorique d'un problème d'équilibre est constituée par des déplacements et des contraintes (ou déformations) obtenus simultanément. Dans la MEF on cherche les déplacements, d'où l'on déduit les contraintes, ce qui signifie que l'on a pas de formulation exacte.

Toutes les indications données en rouge peuvent être à l'origine de non linéarités.

Déplacements



$\mathbf{1} \bullet \mathbf{1}'$

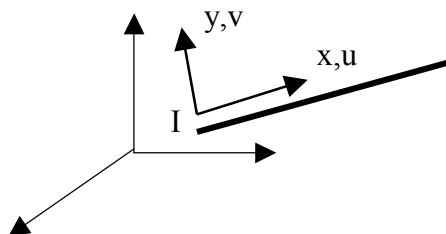
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 = x_1 + u(x_1, y_1, z_1) \\ y'_1 = y_1 + v(x_1, y_1, z_1) \\ z'_1 = z_1 + w(x_1, y_1, z_1) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u} = \text{cste} \rightarrow \mathbf{u}$ mode du corps rigide
rotation ou translation.

Les déplacements sont toujours des variables continues. En théorie linéaire ils sont supposés petits, c'est-à-dire que les configurations 0C et tC sont supposées confondues. Cette hypothèse est rapidement restrictive pour toutes les structures « élancées » telles que les poutres, plaques, coques.

Une poutre EL est non linéaire dès lors que sa flèche est égale à son épaisseur. ($PL^3/3EI = h \rightarrow$ une poutre de longueur 50cm, de largeur 1cm, d'épaisseur 5mm est dans le domaine NL pour une charge de 5N!)

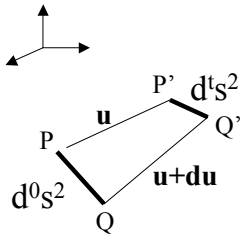
Les déplacements du corps rigide sont de 2 types : translations et rotations. Par exemple, pour une barre dans le *repère local* Ixy :



$x \in (0, L)$
 translation : $u(x) = \text{cste}$
 rotation autour de I : $v(x) = x\theta_0/L$

Déformations

Définition : Une déformation est un déplacement relatif de 2 points du solide.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} {}^0x \\ {}^0y \\ {}^0z \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P}' = \begin{pmatrix} {}^t x = {}^0x + u \\ {}^t y = {}^0y + v \\ {}^t z = {}^0z + w \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} {}^0x + d^0x \\ {}^0y + d^0y \\ {}^0z + d^0z \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} {}^t x = {}^0x + d^0x + u + du \\ {}^t y = {}^0y + d^0y + v + dv \\ {}^t z = {}^0z + d^0z + w + dw \end{pmatrix}$$

$$PQ^2 = d^0x^2 + d^0y^2 + d^0z^2 = 2\mathbf{d}^0\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{d}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{d}\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{d}\bar{\mathbf{u}} \quad \text{avec } \mathbf{d}^0\bar{\mathbf{x}}^T = \langle d^0x, d^0y, d^0z \rangle$$

$$P'Q'^2 = PQ^2 + 2(dud^0x + dvd^0y + dwd^0z) + du^2 + dv^2 + dw^2 = PQ^2 + 2\mathbf{d}^0\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{d}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{d}\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{d}\bar{\mathbf{u}}$$

Rappel de la notation : les vecteurs sont en bleu et les matrices en rouge même s'il n'y a pas toujours le symbole \rightarrow sur les vecteurs pour des raisons pratiques de facilité d'écriture des équations.

Les déformations étant des déplacements relatifs s'expriment en %.

Déformations (suite)

$$d\mathbf{u} = u_{,x}d^0x + u_{,y}d^0y + u_{,z}d^0z = \mathbf{grad}\mathbf{u}^T d^0\mathbf{x}$$

$$d\mathbf{v} = v_{,x}d^0x + v_{,y}d^0y + v_{,z}d^0z = \mathbf{grad}\mathbf{v}^T d^0\mathbf{x}$$

$$d\mathbf{w} = w_{,x}d^0x + w_{,y}d^0y + w_{,z}d^0z = \mathbf{grad}\mathbf{w}^T d^0\mathbf{x}$$

Si on note $|\mathbf{grad}\mathbf{u}| = |\nabla\mathbf{u}|$ la matrice (3x3) dont les colonnes sont les gradients des composantes du vecteur \mathbf{u} :

$$d\bar{\mathbf{u}} = |\nabla\mathbf{u}|^T d^0\bar{\mathbf{x}}$$

Alors,

$$P'Q'^2 - PQ^2 = 2d^0\bar{\mathbf{x}}^T d\bar{\mathbf{u}} + d^0\bar{\mathbf{x}}^T (\cancel{|\nabla\mathbf{u}|} |\nabla\mathbf{u}|^T) d^0\bar{\mathbf{x}}$$

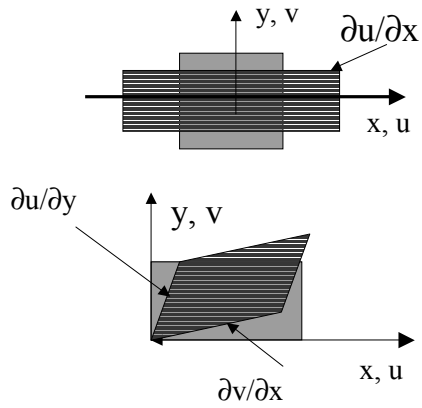
Le second terme (quadratique) est négligé si les déplacements sont **petits** (théorie linéaire) et la **matrice symétrique E dite matrice des déformations** est définie par :

$$P'Q'^2 - PQ^2 = 2d^0\bar{\mathbf{x}}^T |\mathbf{E}| d^0\bar{\mathbf{x}} = d^0\bar{\mathbf{x}}^T (|\nabla\mathbf{u}|^T + |\nabla\mathbf{u}|) d^0\bar{\mathbf{x}}$$

Dans la MEF on utilise plutôt le vecteur :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx})$$

Déformations : Interprétation géométrique



Déformations hydrostatiques
dilatation ou contraction axiales

$$\epsilon_{xx} = \partial u / \partial x$$

$$\epsilon_{yy} = \partial v / \partial y \dots$$

Contraintes de cisaillement

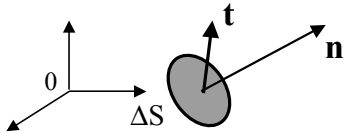
$$2\epsilon_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$$

$$2\epsilon_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \dots$$

Contraintes

Définition : Les contraintes sont des efforts internes dus aux déformations qui s'exercent sur la surface déformée.

L'état de contraintes est défini par une matrice ou en EF par un vecteur



$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{f}}{\Delta S}$$

Le tenseur des contraintes symétrique est défini par Σ (termes σ_{ij}) : $\vec{t} = \Sigma \vec{n}$

Dans la MEF on utilise plutôt le vecteur

$$\vec{\sigma} = (\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx})$$

L'état de contrainte n'est 'physiquement bien perçu' que par le vecteur t . Il dépend de l'orientation de la surface ce qui rend indispensable l'hypothèse de linéarité (car si on ne connaît pas l'orientation de la surface déformée on ne connaît donc pas la contrainte). Les contraintes ne sont définies que dans l'état déformé. Elles ont aussi des interprétations différentes, comme les déformations, selon qu'il s'agit de contraintes du type σ_{ii} ou du type σ_{ij} .

Par exemple si le vecteur n est dirigé selon $0x$, ses composantes sont $(1, 0, 0)$ et le produit Σn est le vecteur $t_x = (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz})$. La projection de ce vecteur sur n donne la contrainte selon la normale σ_{xx} alors que la projection sur le plan tangent donne σ_{xy} et σ_{xz} qui sont les contraintes tangentielles.

Dans un certain système d'axes (directions propres de la matrice Σ) le tenseur des contraintes est diagonal ; les valeurs correspondantes $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ sont appelées contraintes principales et les directions correspondantes directions principales. Dans ce référentiel il n'y a pas de cisaillement.

Équations d'équilibre

Définition d'un déplacement virtuel : un déplacement virtuel dans la configuration d'équilibre est un champ de déplacements qui satisfait les conditions limites et qui ne modifie pas les valeurs des forces appliquées qui restent à leurs valeurs d'équilibre.

Ces déplacements sont dits *virtuels* car ils sont *imaginés* prendre la place des déplacements vrais avec les charges agissant à leur vraies valeurs.

Le travail produit par les forces dans un déplacement virtuel et dans la configuration d'équilibre est dit *travail virtuel*.

Si \mathbf{u}^* est la notation du déplacement virtuel, le travail virtuel effectué par des forces \mathbf{f} est :

$$\mathbf{W}^* = \int_V \vec{\mathbf{f}}^T \vec{\mathbf{u}}^* dV = \vec{\mathbf{f}} \bullet \vec{\mathbf{u}}^*$$

Le travail virtuel dans un solide élastique V soumis à des efforts par unité de volume \mathbf{f}_V dans V et par unité de surface \mathbf{f}_S sur Γ_S est alors :

$$W_e^* = -\left(\int_V \vec{f}_V^T \vec{u}^* dV + \int_{\Gamma_S} \vec{f}_S^T \vec{u}^* dS\right)$$

Le signe – implique que le travail est effectué sur le solide. Sur le bord Γ_u de V où le déplacements est fixé $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ donc il n'y a pas de travail.

On peut démontrer que travail virtuel des efforts internes est, quant à lui, défini par :

$$W_i^* = \int_V \vec{\sigma}^T \vec{\epsilon}^* dV$$

où \bullet et \mathfrak{M} ont les définitions données ci-dessus pour la MEF.

L'équilibre est obtenu par le principe dit des travaux virtuels ou par l'équation :

$$W_i^* + W_e^* = 0$$

Donc le travail de l'ensemble des efforts est nul dans un déplacement virtuel.

Énergie potentielle

Le principe des déplacements virtuels est indépendant du comportement du matériau; il est applicable pour n'importe quel solide (élastique ou inélastique).

Pour les solides élastiques il existe une fonction 'densité d'énergie' U_d telle que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_d}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad i, j = x, y, z$$

Le travail par unité de volume des efforts internes s'écrit alors

$$\frac{\partial U_d}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = dU_d \quad \text{et} \quad U = \int_V dU_d$$

Si on définit l'énergie potentielle des efforts appliqués comme une fonction des déplacements \mathbf{u} ,

$$V = - \int_V \vec{\mathbf{f}}_V^T \vec{\mathbf{u}} dV - \int_{\Gamma_s} \vec{\mathbf{f}}_s^T \vec{\mathbf{u}} dS$$

alors,

$$\delta(U + V) = \delta \mathcal{P} = 0.$$

A l'équilibre l'énergie potentielle totale est stationnaire.

Le théorème du travail virtuel est fondamental car il exprime l'équilibre de toute la structure (et non celui local d'un élément différentiel). Quand il est 'discrétisé' comme c'est le cas avec les EF, l'équilibre n'est donc écrit **qu'aux points de discrétisation**.

Il faut remarquer qu'aucune hypothèse n'est faite sur le comportement du matériau (à la différence de l'approche énergétique)) c'est pourquoi ce théorème est très général et peut en particulier s'appliquer à une grande variété de matériaux dans les domaines linéaires et/ou non linéaires.

Un champ virtuel est aussi défini comme la différence de 2 champs solutions du même problème ce qui est évidemment très *virtuel* dans la mesure où la solution est physiquement unique. Cela explique pourquoi le champ virtuel est toujours nul là où le champ vrai est donné puisque chaque champ doit vérifier les CL.

Les approches par les travaux virtuels ou par l'énergie sont ici complètement équivalentes en remarquant que l'approche énergétique doit prendre en compte le comportement du matériau.

Si le matériau est linéaire élastique (hookéen)

On trouve, $\vec{\sigma} = \mathbf{C} \vec{\epsilon}$

$$\int_V \vec{\sigma}^T \delta \vec{\epsilon} dV = \int_V \vec{\epsilon}^T \mathbf{C} \delta \vec{\epsilon} dV = \frac{1}{2} \delta \left(\int_V \vec{\epsilon}^T \mathbf{C} \vec{\epsilon} dV \right)$$

C est la matrice (symétrique) qui relie déformations et contraintes; elle dépend pour les matériaux homogènes élastiques de 2 constantes E et ν .

Si les efforts appliqués dépendent explicitement du temps comme on le verra, le travail virtuel des efforts d'inertie (ou leur variation) doit être ajouté au bilan précédent, i.e.

$$\int_V \rho \vec{u}^T \dot{\vec{u}} dV \quad (\text{ou } \int_V \rho \vec{u}^T \delta \dot{\vec{u}} dV)$$

A ce terme correspond l'énergie cinétique définie par,

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \vec{u}^T \dot{\vec{u}} dV$$

La MEF est une méthode numérique de résolution des équations d'équilibre pour tout un ensemble de solides avec des conditions limites et de chargements très variés.