Rappels d’algèbre linéaire

C. GUILLET
Institut Arts et Métiers Chalon sur Saône / laboratoire Lispen

Arts Sciences et Technologies
et Métiers

Sommaire

- Espaces vectoriels / Applications linéaires
- Matrices
- Applications linéaires et matrices
- Déterminants

Arts Sciences et Technologies et Métiers

ESPACES VECTORIELS ($\mathbb{R}^n$)

APPLICATIONS LINEAIRES

Chapitre 1

I $\mathbb{R}$ espace vectoriel

1) Définition :

E ensemble (de vecteurs)

loi interne + : $\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E \\ (\vec{u},\vec{v}) &\mapsto \vec{u}+\vec{v} \end{aligned}$

loi externe . : $\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda,\vec{u}) &\mapsto \lambda \cdot \vec{u} \end{aligned}$

I $\mathbb{R}$ espace vectoriel

1) Définition :

$(E,+)$ **groupe commutatif** si
:

- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (+ est **associative**)
- **élément neutre** $\vec{0}\in E$: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
- tout $\vec{u}\in E$ a un **opposé** $-\vec{u}$: $\vec{u}+(-\vec{u})=-\vec{u}+\vec{u}=\vec{0}$
- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (+ est **commutative**)

I $\mathbb{R}$ espace vectoriel

1) Définition :

$(E,+,\cdot)$ **$\mathbb{R}$ espace vectoriel** si :

- $(E,+)$ **groupe commutatif**
- $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$
- $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})=(\lambda\mu)\cdot\vec{u}$
- $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$
- $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

I $\mathbb{R}$ espace vectoriel

2) $\mathbb{R}^n$:

- – $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vecteur de $\mathbb{R}^n$

  – addition : $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

  $$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

  – multiplication externe : $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

  $$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

  – $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ espace vectoriel

Arts et Métiers Sciences et Technologies

I $\mathbb{R}$ espace vectoriel

2) $\mathbb{R}^n$:

- Exemple : $\mathbb{R}^3$

ensemble des vecteurs de la forme $\vec{u} = (x, y, z)$

muni de + et de .

est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

I $\mathbb{R}$ espace vectoriel

3) Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$:

- F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si :
  - $\boldsymbol{F}$ non vide inclus dans $\mathbb{R}^n$
  - $\boldsymbol{F}$ stable pour **+** **:** $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in F \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in F$
  - $\boldsymbol{F}$ stable pour **.** **:** $\vec{u} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot \vec{u} \in F$

I $\mathbb{R}$ espace vectoriel

3) Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$:

- F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si :

  – F non vide inclus dans $\mathbb{R}^n$

–F stable par combinaisons linéaires :

$$\vec{u} \in F \text{ et } \vec{v} \in F \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in F$$

- Exemples : $D = \{\vec{u} = (x,0,0)\}$ et $P = \{\vec{u} = (x,y,0)\}$

sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

II Famille liée, famille libre

Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$ p vecteurs de $\mathbb{R}^n$

1) Combinaison linéaire :

- Combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$:

$\boxed{\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_p\vec{u}_p}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ réels

- Ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$:

$\boxed{Vect\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p\right)}$

- Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}_1 = (1,0,0)$ et $\vec{u}_2 = (0,1,0)$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

II Famille liée, famille libre

2) Famille liée :

- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$ famille liée de $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$ linéairement dépendants

$\Leftrightarrow$ $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ Il existe $1 \leq i \leq p$ tel que

$$\vec{u}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\vec{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i}\vec{u}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\vec{u}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\vec{u}_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_i}\vec{u}_p$$

- Exemple : dans $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}_1 = (1,2)$ et $\vec{u}_2 = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}\right)$

- Remarques : - dans $\mathbb{R}^2$, vecteurs liés = vecteurs **colinéaires**

II Famille liée, famille libre

3) Famille libre :

- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$ famille libre de $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$ linéairement indépendants

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_p\vec{u}_p = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0}$

- Exemples : dans $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,2,0)$ et $\vec{v}_3 = (0,1,1)$

$\vec{v}_1 = (1,0,1)$ et $\vec{v}_2 = (1,2,0)$

Arts et Métiers Sciences et Technologies

III Famille génératrice, base, dimension

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,

soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$ p vecteurs de E.

1) Famille génératrice :

- $\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p\right)$ **famille génératrice de** $\boldsymbol{E}$

  $\Leftrightarrow$ $\boxed{Vect\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p\right) = E}$

- Exemples : pour $E = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,2,0)$ et $\vec{v}_3 = (0,1,1)$

  $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,2,0)$, $\vec{v}_3 = (0,1,1)$ et $\vec{v}_4 = (3,2,1)$

III Famille génératrice, base, dimension

2) Base :

- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p)$ **base de E**

  $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p)$ famille **libre** et **génératrice** de E

  $\Leftrightarrow$ tout vecteur de E s'écrit comme **combinaison linéaire unique** de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p$

- Exemples : pour $E=\mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,2,0)$ et $\vec{v}_3 = (0,1,1)$

  $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,0,1)$

  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

III Famille génératrice, base, dimension

3) Dimension :

- Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

  Ce nombre = **dimension** de E = $\boxed{\dim E}$.

- Exemples : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

  $\dim \mathbb{R}^n = n$

- Si $\dim E = p$:
  - famille **libre** de $\boldsymbol{p}$ vecteurs de $E \Rightarrow$ **base** de E
  - famille **génératrice** de $\boldsymbol{p}$ vecteurs de $E \Rightarrow$ **base** de E.

Arts Sciences et Technologies et Métiers

IV Application linéaire

1) Définitions :

$$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$

a) Définitions, notations :

- f **application linéaire** $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$: ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

- Si $n = p$, alors f **endomorphisme** de $\mathbb{R}^n$

  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$: ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$

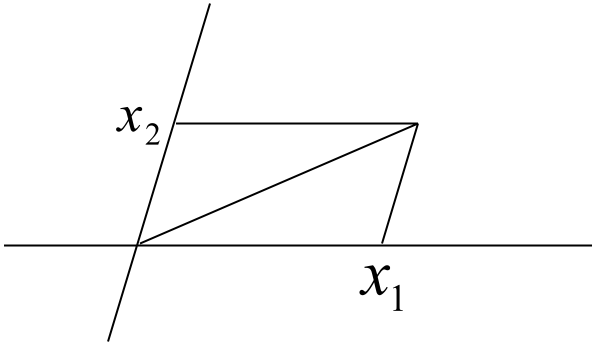
IV Application linéaire

1) Définitions :

b) Exemples :

- $$l : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax \end{array}$$

- $$p_1 : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0) \end{array}$$



- $$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x - y, 2x + 3y) \end{array}$$

IV Application linéaire

2) Opérations : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

- $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et λ réel :

  $$f + g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$$

  et $\lambda f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

- $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$:

  $$g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$$

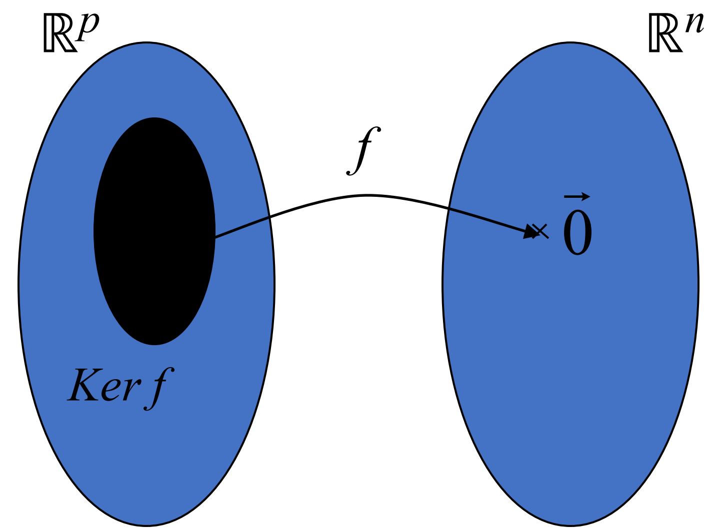
IV Application linéaire

3) Noyau :

- Noyau de f $=$ $\boldsymbol{Ker\,f}$:

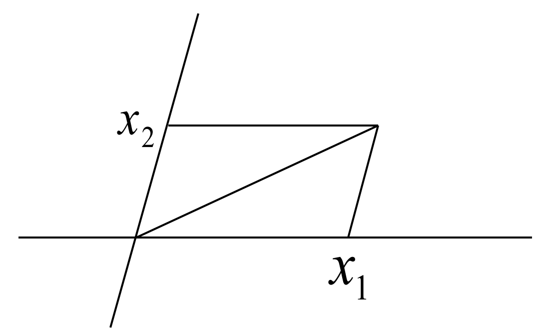
  ensemble des vecteurs $\vec{u}$

  de $\mathbb{R}^p$ tels que $f(\vec{u}) = \vec{0}$



- Exemple :

$$Ker\,p_1 = \{(0, x_2),\, x_2 \in \mathbb{R}\}$$



- $Ker\,f$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

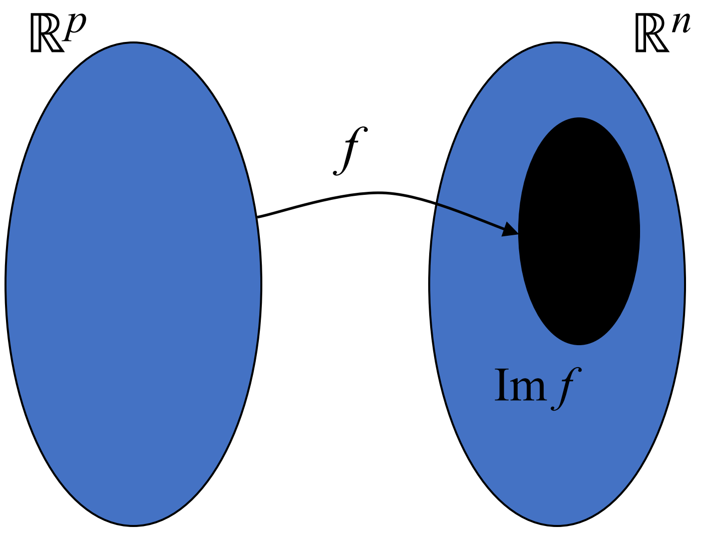
Arts et Métiers Sciences et Technologies

IV Application linéaire

4) Image :

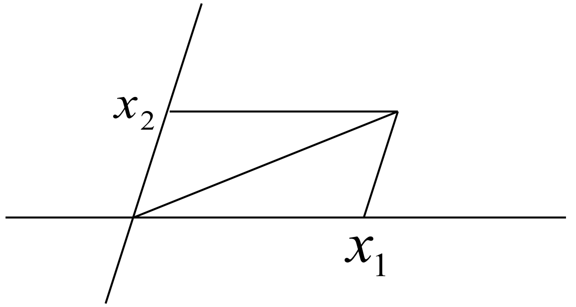
- Image de f $=$ $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{f}$:

  ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ ayant au moins un antécédent dans $\mathbb{R}^p$ par f



- Exemple :

  $$\mathrm{Im}\, p_1 = \{(x_1, 0),\, x_1 \in \mathbb{R}\}$$



- $\mathrm{Im}\, f$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

IV Application linéaire

5) Rang :

- Rang de f = $\boldsymbol{rg(f)}$ = dimension de $\operatorname{Im} f$

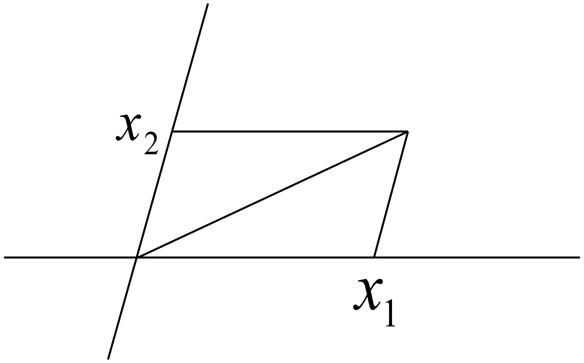
- Théorème du rang : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

$$\boxed{p = \dim \mathbb{R}^p = \dim(Ker\, f) + rg(f)}$$

- Exemple :

$$\dim(Ker\, p_1) = 1 = rg(p_1)$$

$$1 + 1 = 2$$



MATRICES

Chapitre 2

Dans tout ce qui suit n et p désignent deux entiers naturels non nuls

I DEFINITIONS

1) Définitions, notations :

- Matrice de type **(*n*,*p*)** :

  tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes

$$A = \left(a_{i\,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,p} \\ \vdots & \vdots & a_{i\,j} & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i\text{-ième ligne} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

I DEFINITIONS

1) Définitions, notations :

- Matrice ligne $(n = 1)$ $A = \left(a_{1\,j}\right)_{1 \le j \le p} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,p} \end{pmatrix}$

- Matrice colonne $(p = 1)$: $A = \left(a_{i\,1}\right)_{1 \le i \le n} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} \\ a_{2\,1} \\ \vdots \\ a_{n\,1} \end{pmatrix}$

- Vecteur : matrice ligne ou matrice colonne

I DEFINITIONS

1) Définitions, notations :

- Matrice nulle : $0 = (0)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

- $M_{n\,p}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients réels

- Matrices égales :

  - même nombre de lignes

  - même nombre de colonnes

I DEFINITIONS

2) Transposée :

$$A = \left(a_{i\,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in M_{n\,p}(\mathbb{R})$$

Matrice transposée de A : $\boxed{{}^{t}A = \left(a_{j\,i}\right)_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le i \le n}}}$

(on échange les lignes et les colonnes)

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

II OPERATIONS

1) Espace vectoriel :

a) Addition :

$A = \left(a_{i\,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ et $B = \left(b_{i\,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ dans $M_{n\,p}(\mathbb{R})$

$$\boxed{A + B = \left(a_{i\,j} + b_{i\,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}}$$

(somme « terme à terme »)

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 11 & -12 & 0 \end{pmatrix}$

II OPERATIONS

1) Espace vectoriel :

b) Multiplication par un scalaire :

$A=(a_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ dans $M_{n\,p}(\mathbb{R})$ et λ réel

$$\boxed{\lambda A=(\lambda a_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}}$$

(chaque terme est multiplié par λ)

Exemple : $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ et $\lambda=-2$

II OPERATIONS

1) Espace vectoriel :

c) $\mathbb{R}$ espace vectoriel :

$(M_{n\,p}(\mathbb{R}), +, .)$ $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

$$\dim M_{n\,p}(\mathbb{R}) = n \times p$$

II OPERATIONS

2) Multiplication de deux matrices :

a) Cas particulier :

si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$

$$AB = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p \right) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_k b_k \right)$$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

II OPERATIONS

2) Multiplication de deux matrices :

b) Cas général :

$$A=\left(a_{i\,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}\in M_{n\,p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B=\left(b_{i\,j}\right)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le m}}\in M_{p\,m}(\mathbb{R})$$

$$AB=\left(c_{i\,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}\in M_{n\,m}(\mathbb{R})$$

avec $c_{i\,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i\,k}b_{k\,j}=a_{i\,1}b_{1\,j}+a_{i\,2}b_{2\,j}+\cdots+a_{i\,p}b_{p\,j}$

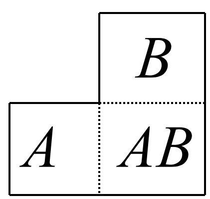
Arts Sciences et Technologies et Métiers

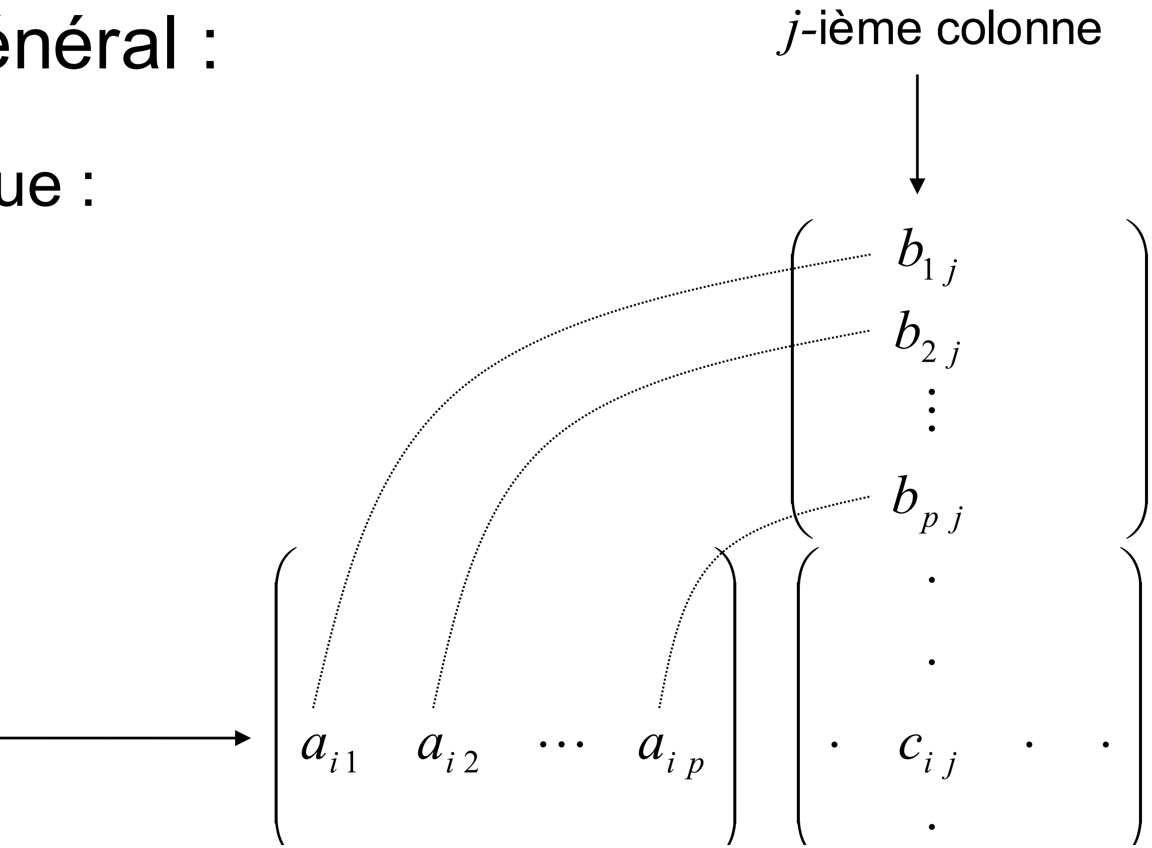
II OPERATIONS

2) Multiplication de deux matrices :

b) Cas général :

Disposition pratique :





II OPERATIONS

2) Multiplication de deux matrices :

b) Cas général :

Exemples : calculer AB et BA

① $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

II OPERATIONS

2) Multiplication de deux matrices :

c) Propriétés :

- Multiplication non commutative ($AB \neq BA$)
- Multiplication associative : $A(BC) = (AB)C$
- Multiplication distributive par rapport à l'addition :

$$A(B+C) = AB + AC \text{ et } (A+B)C = AC + BC$$

- Le produit de deux matrices non nulles peut être nul

(exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Arts et Métiers Sciences et Technologies

III MATRICES CARREES

1) Définitions :

- Matrice carrée d'ordre n : n lignes et n colonnes

- $M_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées d'ordre n

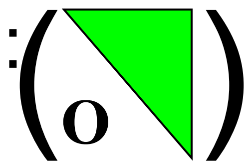
- La diagonale de $A = (a_{i\,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in M_n(\mathbb{R})$ est composée

  des termes $a_{i\,i}$, pour $i = 1, \ldots, n$.

III MATRICES CARREES

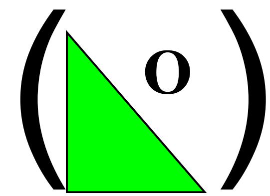
2) Matrices particulières : $A = \left(a_{i\,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in M_n\,(\mathbb{R})$

- A triangulaire supérieure :

A = 

$a_{i\,j} = 0$ pour $1 \le j < i \le n$

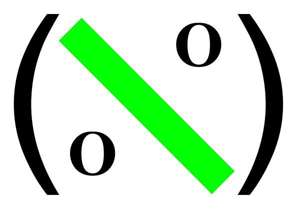
- A triangulaire inférieure :

A = 

$a_{i\,j} = 0$ pour $1 \le i < j \le n$

- A diagonale :

$a_{i\,j} = 0$ pour $i \ne j$

A = 

III MATRICES CARREES

2) Matrices particulières :

- $\boxed{I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ matrice unité d'ordre n $\quad (BI_n = I_nB = B)$

- A symétrique : $\quad a_{i\,j} = a_{j\,i} \quad ({}^tA = A)$

- A anti-symétrique : $\quad a_{i\,j} = -a_{j\,i} \quad ({}^tA = -A)$

III MATRICES CARREES

3) Matrices carrées inversibles :

- $A = \left(a_{i\,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in M_n(\mathbb{R})$ inversible :

  il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\boxed{AB = BA = I_n}$

  On note : $B = A^{-1}$

  $GL_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles

III MATRICES CARREES

3) Matrices carrées inversibles :

- Remarque :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ est non nulle et non inversible

- A et B matrices inversibles de $GL_n(\mathbb{R})$:

$$AB \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

APPLICATIONS LINEAIRES
et
MATRICES

Chapitre 3

Dans tout ce qui suit n et p désignent deux entiers naturels non nuls

I MATRICES et APPLICATIONS LINEAIRES

$\mathcal{B}_p = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_p\right)$ base de $\mathbb{R}^p$

$\mathcal{B}_n = \left(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\right)$ base de $\mathbb{R}^n$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$

I MATRICES et APPLICATIONS LINEAIRES

1) Matrice d'une application linéaire :

- Pour $j = 1, \ldots, p$, $f\left(\vec{e}_j\right)$ s'écrit dans $\mathcal{B}_n$ sous la forme

$$\boxed{f\left(\vec{e}_j\right) = a_{1\,j}\vec{\varepsilon}_1 + a_{2\,j}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{n\,j}\vec{\varepsilon}_n}$$

$$M_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f\left(\vec{e}_1\right) & & f\left(\vec{e}_j\right) & & f\left(\vec{e}_p\right) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j} & \cdots & a_{1\,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i\,j} & \cdots & a_{i\,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j} & \cdots & a_{n\,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \vec{\varepsilon}_i \\ \vdots \\ \vec{\varepsilon}_n \end{array} \end{array}$$

Matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$

I MATRICES et APPLICATIONS LINEAIRES

1) Matrice d'une application linéaire :

● Réciproquement, toute matrice de $M_{n\,p}(\mathbb{R})$ définit une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

● Exemple :

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ \vec{u} = (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (2x_1 - 3x_2 + x_3\, ,\, x_1 - x_3) \end{aligned}$$

2) Image d'un vecteur :

$$M = M_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f)$$

Vecteur $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_p\vec{e}_p$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}_p$.

Vecteur $\vec{v} = f(\vec{u})$ de coordonnées $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}_n$.

2) Image d'un vecteur :

On a : $\vec{v} = f\left(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_p\vec{e}_p\right) = x_1 f\left(\vec{e}_1\right) + \cdots + x_p f\left(\vec{e}_p\right)$

$$\vec{v} = f(\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{cases}$$

$$\vec{v} = f(\vec{u}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad Y = MX$$

$$\boxed{\vec{v} = f(\vec{u}) \quad \Leftrightarrow \quad Y = MX}$$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

I MATRICES et APPLICATIONS LINEAIRES

3) Rang d'une matrice :

- $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$
- $\vec{v} \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \vec{v} = f(\vec{u}) = f(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_p\vec{e}_p) = x_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + x_p f(\vec{e}_p)$

  $f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_p)$ famille génératrice de $\operatorname{Im} f$

  $rg(f) =$ nombre de $f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_p)$ indépendants

- Rang d'une matrice = rang d'une application linéaire

  $f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_p)$ colonnes de f

$\boxed{rg(M) = \text{nombre de vecteurs-colonne indépendants}}$

4) Opérations :

- $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et λ réel

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f+g) = M_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f) + M_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(g)}$$

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(\lambda f) = \lambda\, M_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f)}$$

- $\mathcal{B}_m$ base de $\mathbb{R}^m$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{R}^m$$

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_m}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(g) \times M_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f)}$$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

II MATRICES et CHANGEMENTS DE BASES

1) Matrice de passage :

$\mathcal{B}_p = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_p)$ et $\mathcal{B}'_p = (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \cdots, \vec{e}\,'_p)$ bases de $\mathbb{R}^p$

- Matrice de passage de $\mathcal{B}_p$ à $\mathcal{B}'_p$:

$$P_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}'_p} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{e}\,'_1 & \vec{e}\,'_2 & \quad \vec{e}\,'_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \end{matrix}} & \quad \boxed{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \\ \cdot \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \\ \vec{e}_p \end{array}$$

Exemple :

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$ bases de $\mathbb{R}^2$ avec $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

II MATRICES et CHANGEMENTS DE BASES

1) Matrice de passage :

- $\boxed{P_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}'_p} = M_{\mathcal{B}'_p,\mathcal{B}_p}\left(Id_p\right)}$

Vecteur $\vec{u}$ de coordonnées X dans $\mathcal{B}_p$ et X' dans $\mathcal{B}'_p$.

$$X = P_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}'_p} X' \Rightarrow \boxed{X' = P_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}'_p}{}^{-1} X}$$

$$P_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}'_p}{}^{-1} = P_{\mathcal{B}'_p,\mathcal{B}_p}$$

Exemple (suite) : coordonnées de $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ dans $\mathcal{B}'$

II MATRICES et CHANGEMENTS DE BASES

2) Application linéaire et changements de bases :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{R}^p \ \mathcal{B}_p \arrow[r, "f"', "(M)"] & \mathbb{R}^n \ \mathcal{B}_n \arrow[d, "Id_n", "\left(Q^{-1}\right)"'] \\
\mathbb{R}^p \ \mathcal{B}'_p \arrow[u, "Id_p", "(P)"'] \arrow[r, "f", "(M')"'] & \mathbb{R}^n \ \mathcal{B}'_n
\end{tikzcd}$$

$$f = Id_n \circ f \circ Id_p$$

$$\boxed{M' = Q^{-1}MP}$$

M et M' **équivalentes**

(semblables si $Q = P$)

Exemple (suite) : $f\left(\vec{e}_1\right) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $f\left(\vec{e}_2\right) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

Matrice de f dans $\mathcal{B}'$

DETERMINANTS

Chapitre 4

I Définitions, propriétés

1) Déterminant d'ordre 2 :

$\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}_1 = (a_{11}, a_{21})$ et $\vec{u}_2 = (a_{12}, a_{22})$

- $$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{array}{cc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \\ \hline \end{array}\! \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

- Déterminant indépendant de la base choisie
- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$

Exemple : $\vec{u}_1 = (1;-1)$ et $\vec{u}_2 = (3;2)$

I Définitions, propriétés

2) Déterminant d'ordre 3 :

$\mathcal{B}$ base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$,

- $\vec{u}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\vec{u}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ et $\vec{u}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

- $\det(\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2 + \mu\vec{u}_3, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

- $\boxed{\vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ et } \vec{u}_3 \text{ indépendants} \Leftrightarrow \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \neq 0}$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

II Deux méthodes de calcul des déterminants d'ordre 3

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1) Développement suivant une ligne ou une colonne :

- M_{ij} = **mineur** de a_{ij} = « D privé de la ligne i et de la colonne j »

Exemple : $M_{23} =$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

II Deux méthodes de calcul des déterminants d'ordre 3

1) Développement suivant une ligne ou une colonne :

- $\Delta_{i\,j}$ = **cofacteur** de $a_{i\,j} = (-1)^{i+j} M_{i\,j}$

  Exemple : $\Delta_{2\,3} =$

  $$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$ contient le signe à mettre devant le mineur

- Suivant la ligne i : $\boxed{D = a_{i\,1}\Delta_{i\,1} + a_{i\,2}\Delta_{i\,2} + a_{i\,3}\Delta_{i\,3}}$

  Suivant la colonne j : $\boxed{D = a_{1\,j}\Delta_{1\,j} + a_{2\,j}\Delta_{2\,j} + a_{3\,j}\Delta_{3\,j}}$

Arts et Métiers Sciences et Technologies

II Deux méthodes de calcul des déterminants d'ordre 3

1) Développement suivant une ligne ou une colonne :

Exemple : $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$$D = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$D = a_{13}\Delta_{13} + a_{23}\Delta_{23} + a_{33}\Delta_{33}$$

II Deux méthodes de calcul des déterminants d'ordre 3

2) Règle de Sarrus :

- Valable que pour l'ordre 2 et l'ordre 3
- Méthode :

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Exemple : $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

III Calcul des déterminants d'ordre quelconque

1) Mineur d'ordre n-1:

- **Définition :** Soit A une matrice de $M_{n,n}$ (R).

On appelle mineur de a_{ij} le déterminant d'ordre n-1 noté M_{ij} obtenu à partir de :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

en supprimant la ligne i et la colonne j

III Calcul des déterminants d'ordre quelconque

2) Cofacteur:

- **Définition :** Soit A une matrice de $M_{n,n}$ (R).

On appelle cofacteur de a_{ij} le déterminant d'ordre n-1 noté Δ_{ij} défini par :

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

III Calcul des déterminants d'ordre quelconque

3) Développement / ligne ou colonne:

- **Proposition :** Soit A une matrice de $M_{n,n}$ (R).

On a:

(1) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Delta_{i,j}$ (développement de det(A) par rapport à la colonne j)

(2) $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\Delta_{i,k}$ (développement de det(A) par rapport à la ligne i)

III Calcul des déterminants d'ordre quelconque

4) Propriétés:

Dans la pratique, on utilisera les règles suivantes:

- Si une colonne (resp. une ligne) est multipliée par λ , alors le déterminant est multiplié par λ
- Si on permute deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est multiplié par (–1)
- Si deux colonnes (resp. deux lignes) sont proportionnelles, alors le déterminant est nul
- Si à une colonne (resp. une ligne) donnée on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. autres lignes), le déterminant est inchangé

Arts Sciences et Technologies et Métiers

III Calcul des déterminants d'ordre quelconque

Remarques:

- Avec ces formules, on ramène ainsi le calcul d'un déterminant d'ordre n au calcul de n déterminants d'ordre (n-1).

- Dans la pratique, on commence par faire apparaître des zéros sur une ligne (resp. une colonne) puis on développe le déterminant par rapport à cette ligne (resp. colonne). On a alors un seul déterminant d'ordre (n-1) à calculer !

Exemple: calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

IV Des applications

1) Rang d'une matrice carrée d'ordre 3 :

- $\det A \neq 0$: vecteurs-colonne indépendants $\Rightarrow$ $rg(A) = 3$
  (A inversible)

- $\det A = 0$:

  - s'il existe au moins un mineur non nul : $rg(A) = 2$

  - si tous les mineurs sont nuls (avec $A \neq 0$) : $rg(A) = 1$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

IV Des applications

2) Inversion d'une matrice carrée :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ inversible $(\det A \neq 0)$

$coA = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}$ ou $coA = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^{t}(coA)}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

IV Des applications

3) Résolution d'un système de Cramer :

On considère le système de n équations à n inconnues suivant:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \quad . \quad . \quad . \quad + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \quad . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ a_{n,1}x_1 + \quad . \quad . \quad . \quad + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

qu'on suppose de Cramer (det A≠ 0)

Arts Sciences et Technologies et Métiers

IV Des applications

3) Résolution d'un système de Cramer :

Si A désigne la matrice du système, alors on a :

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ . & & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & & . \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{d\acute{e}tA}$$

Pour i=1,…,n

IV Des applications

3) Résolution d'un système de Cramer :

Exemple: résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & =1 \\ x & +y & -z & =2 \\ 3x & +y & +2z & =1 \end{cases}$$

Arts Sciences et Technologies et Métiers