

1. Introduction

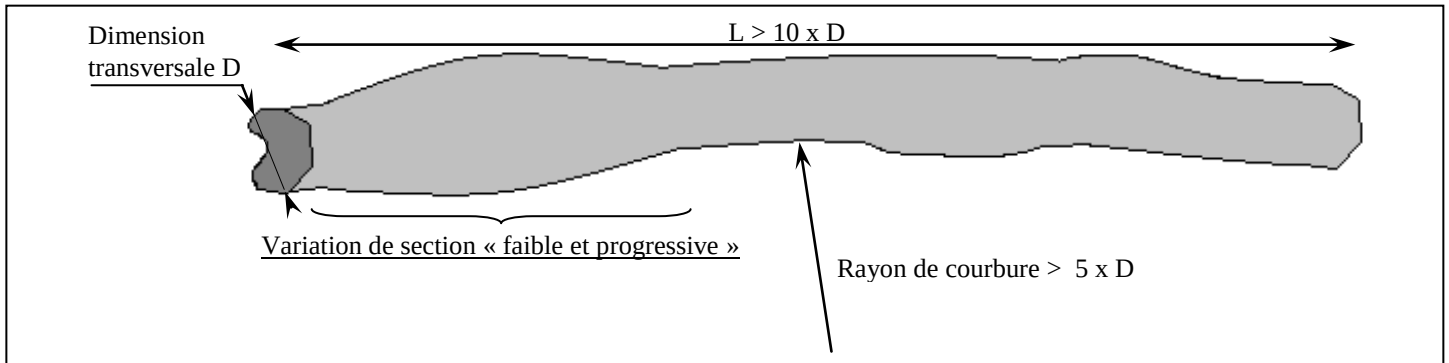
Toute pièce soumise à des actions mécaniques se déforme de façon permanente ou temporaire (une fois les actions mécaniques disparues, la pièce reprend sa forme initiale), voire casse.

Dans le cas de pièces à la forme particulière appelée « poutre », les objectifs de ce cours sont :

- de connaître les principales sollicitations mécaniques,
- de savoir rigidifier une structure,
- de savoir estimer la déformation et la résistance d'une pièce.

2. Définition d'une pièce de type poutre

Pour être considérée comme une poutre, la pièce doit respecter au mieux la géométrie suivante :



Le matériau constituant la poutre doit être :

- homogène (**contre**-exemple : béton avec du gros gravier),
- isotrope (caractéristiques mécaniques identiques dans toutes les directions ; **contre**-exemples : bois, matériau composite en fibres de carbone).

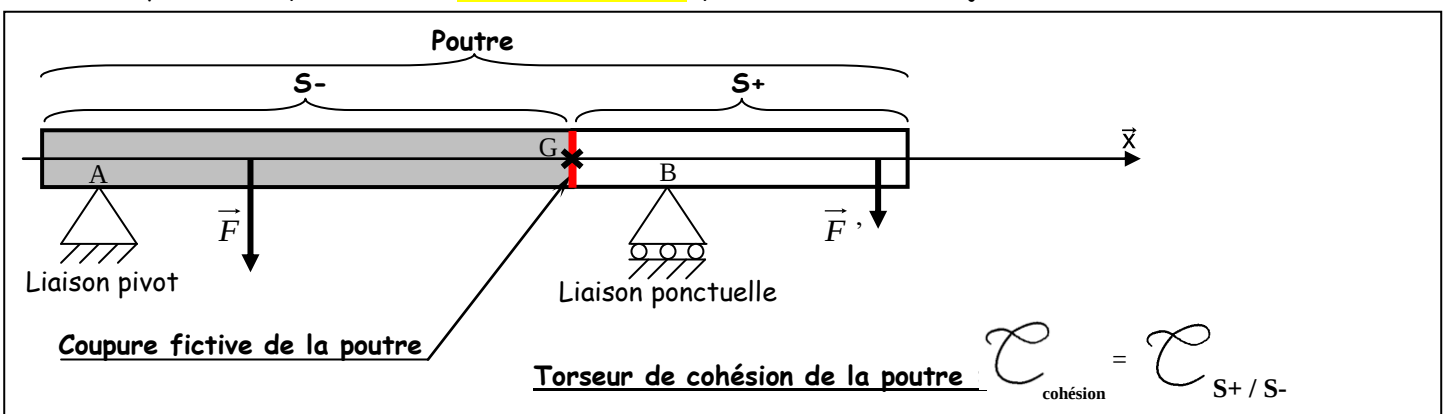
Remarques concernant les résultats donnés dans ce document et issus de la « Théorie des poutres » :

Les efforts sur la poutre doivent être appliqués « relativement » lentement (pas de choc), et les déformations doivent être « relativement » faibles.

Plus une pièce est proche de ce modèle, et plus les résultats ci-après sont proches de la réalité. Par contre, même si une pièce n'est pas proche de ce modèle, ces résultats bien que faux, peuvent donner un ordre de grandeur des déformations et des contraintes.

3. Définition du torseur de cohésion

Le **torseur de cohésion** représente l'action mécanique d'une partie de la poutre (S+) sur l'autre partie (S-). Ce torseur permet de quantifier les **efforts intérieurs** qui transitent dans la jonction entre S- et S+.



Le torseur de cohésion est toujours exprimé au centre de gravité G d'une coupure fictive entre ces 2 parties.

Plus les valeurs de ce torseur de cohésion sont importantes, plus les déformations sont importantes et plus la pièce risque de se déformer de façon permanente, voire de casser.

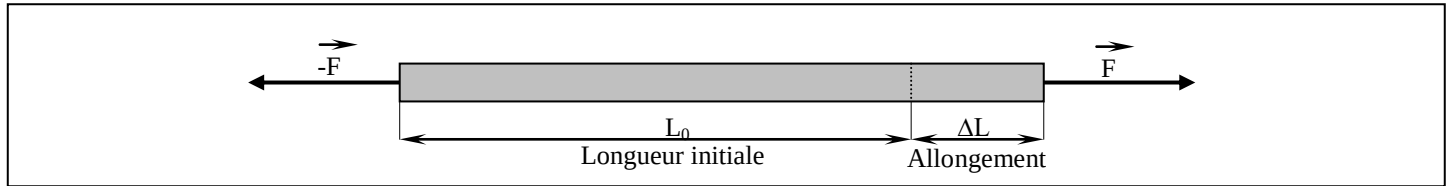
Méthode pour déterminer ce torseur :

Il suffit d'étudier l'équilibre d'un des tronçons de poutre (S- ou S+), et d'en déduire l'action de l'extérieur sur S+, ou de l'extérieur sur S-. On obtient alors :

$$\mathcal{C}_{\text{cohésion}} = +\mathcal{C}_{\text{Extérieur / S+}} = -\mathcal{C}_{\text{Extérieur / S-}}$$

4. Sollicitation de traction-compression

Soit une barre que l'on étire (ou que l'on comprime) :

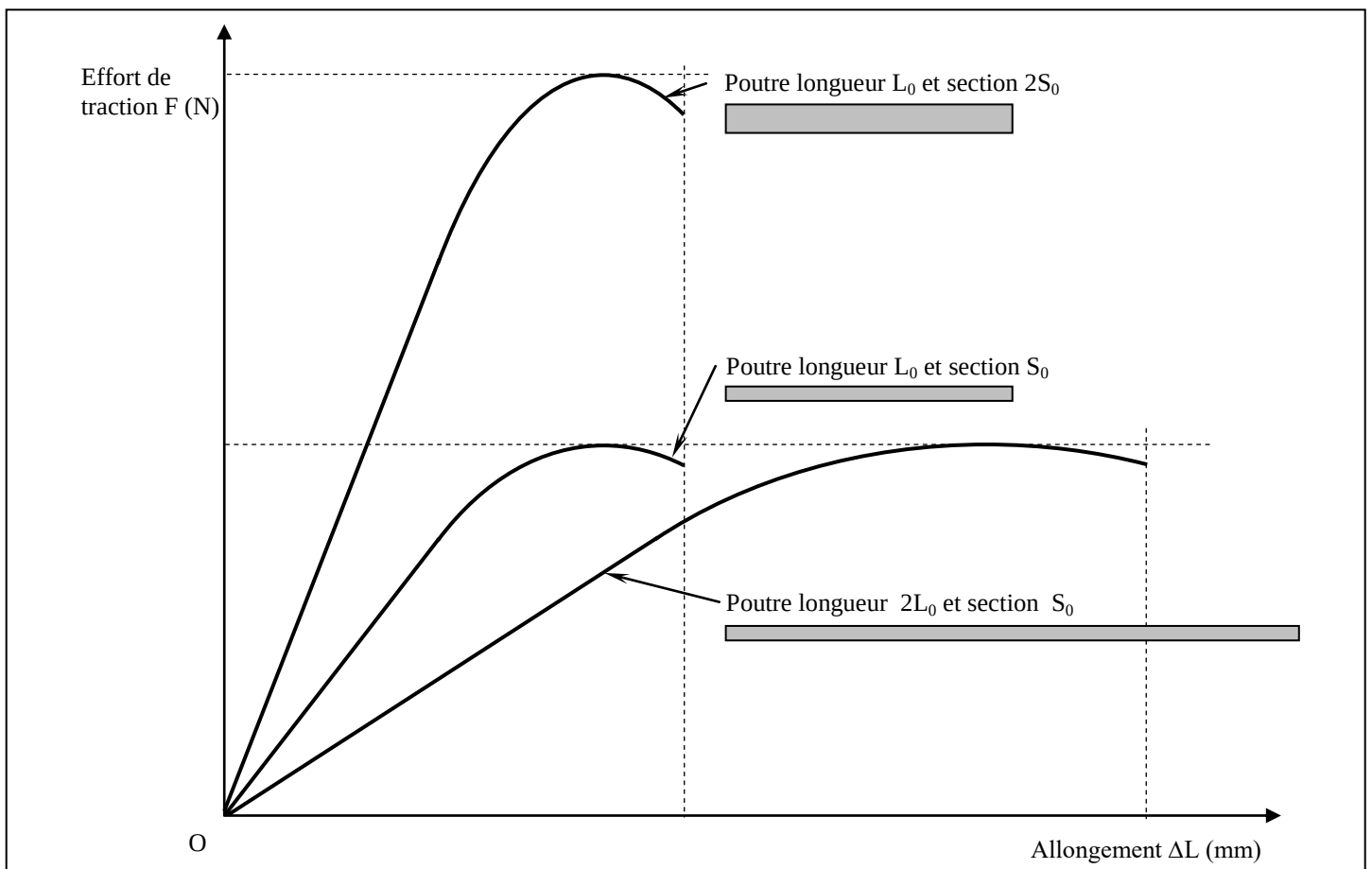


La poutre se comporte comme un ressort :

- si l'effort n'est pas trop important, la poutre s'allonge avec l'effort, et après que l'effort ait été supprimé, la poutre se rétracte et reprend sa longueur initiale. On parle alors de déformation dans le **domaine élastique**,
- si l'effort est trop important, la poutre s'allonge avec l'effort, et après que l'effort ait été supprimé, la poutre se rétracte, mais ne reprend pas sa longueur initiale. On parle alors de déformation dans le **domaine plastique**.

Essai de traction :

La machine permettant de faire ce type d'essai donne les courbes suivantes pour des barres du même matériau, mais de dimensions différentes :

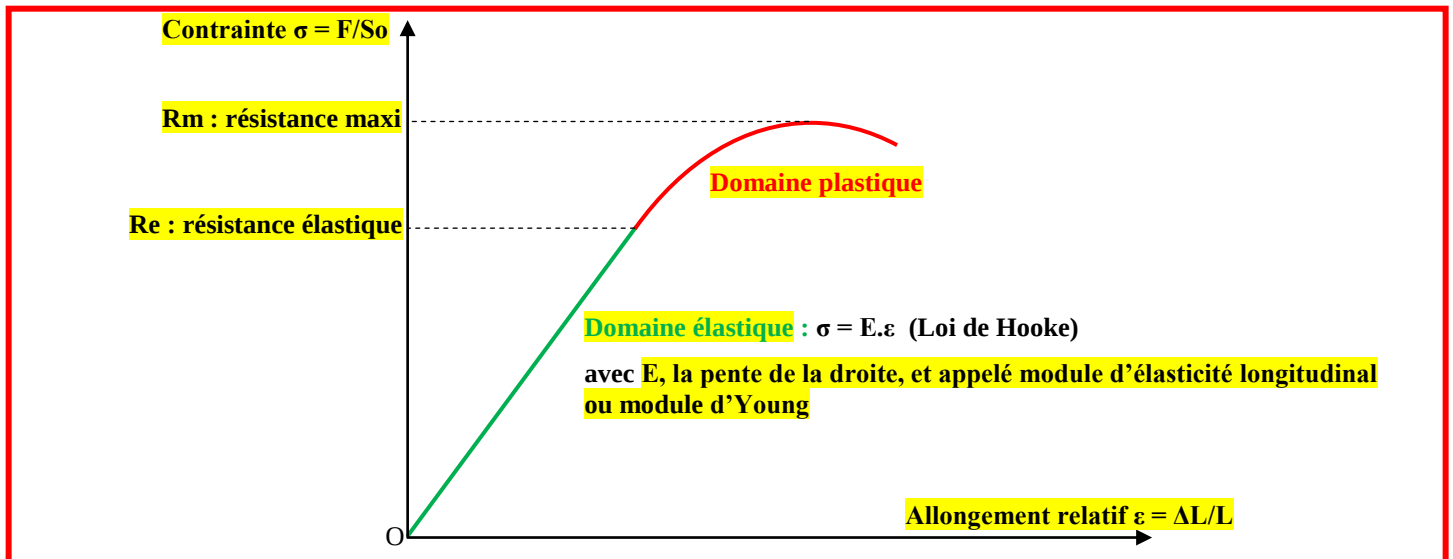


Remarque : sur ces courbes, on constate que l'effort diminue après un certain allongement car à partir de ce moment, la section de la barre commence à se réduire à un endroit. Ce phénomène est appelé la striction.

Striction de la barre



Si on considère les courbes F/S_0 en fonction de l'allongement relatif $(\Delta L/L_0)$, on constate que ce sont quasiment les mêmes, quelles que soient les dimensions de la barre :



Le rapport F/S_0 est similaire à une pression et appelé **contrainte**.

L'unité courante est le **Mpa = N/mm²**.

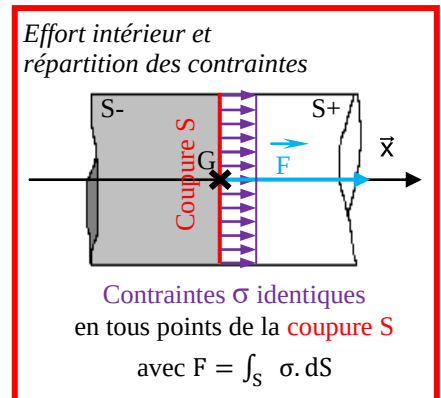
4.1. Torseur de cohésion :

$$\mathcal{C}_{\text{cohésion}} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Quand dans le torseur de cohésion, toutes les composantes sont nulles, sauf une composante de la résultante qui est parallèle à la direction de la poutre (ici $\bar{x}$), la poutre est sollicitée en **traction** ($F > 0$) ou en **compression** ($F < 0$).

4.2. Répartition des contraintes

Comme les contraintes sont perpendiculaires à la coupure S , on parle de **contrainte normale**, notée σ ou σ_x (x comme l'axe $\bar{x}$) ou σ_n (n comme normale à S), avec $\sigma = \frac{F}{S_0}$.



Remarque valable pour toutes les sollicitations : le principe de Barré de Saint-Venant

Ce principe stipule que les résultats obtenus en RDM ne s'appliquent qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés en un point.

Ainsi, dans l'exemple de la poutre en traction, les contraintes sont différentes de $\frac{F}{S_0}$ aux endroits où l'on exerce les efforts, c'est-à-dire aux extrémités de la barre, car elles dépendent de la façon dont sont appliqués ces efforts. Par exemple, si la barre est pincée aux 2 extrémités pour tirer dessus, on comprend bien qu'il y a d'autres sollicitations et donc d'autres contraintes à prendre en compte.

4.3. Rigidité et résistance

Pour limiter les déformations, il faut augmenter la section S_0 .

Pour être toujours dans le domaine élastique, il faut que : $\sigma = \frac{F}{S_0} \leq R_e$. Néanmoins, comme la théorie des poutres est une méthode approchée et qu'il existe des incertitudes sur les données, la formule utilisée en dimensionnement de structure est la suivante : $\sigma = \frac{F}{S_0} \leq \frac{R_e}{s}$, avec s coefficient de sécurité (pouvant aller de 1,5 à 15).

4.4. Cas particulier en compression

Si les efforts de compression et l'élancement (rapport L/D) de la poutre sont suffisamment importants, la poutre peut **flamber**. Le phénomène est alors proche du phénomène de la flexion (voir théorie d'Euler non abordée dans ce document).

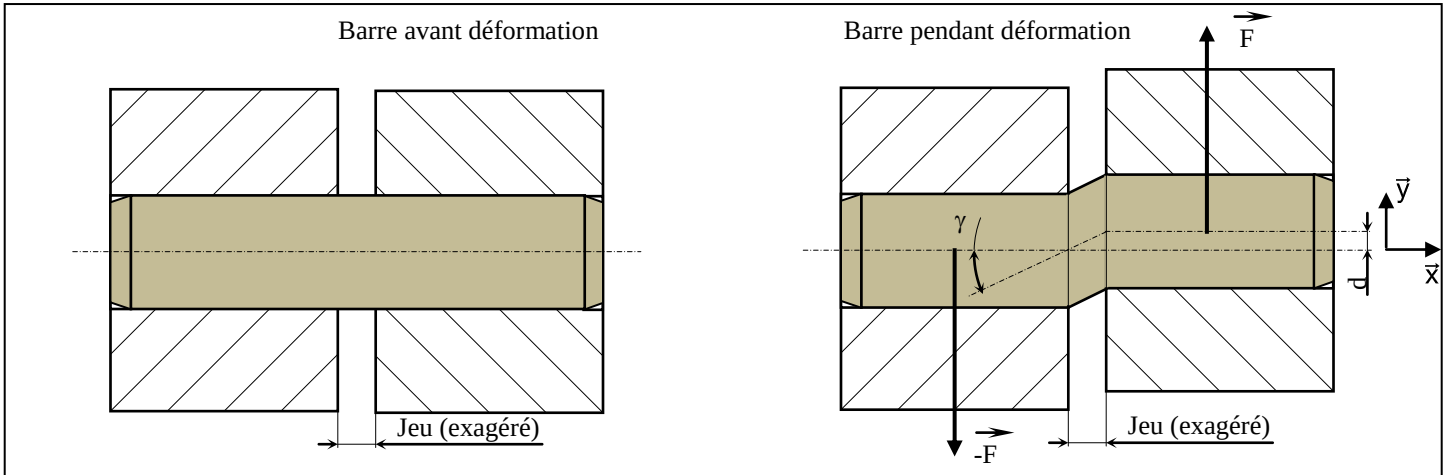
4.5. Compléments

- allongement après rupture : $A\% = \frac{l_u - l_0}{l_0} \cdot 100$, avec :
 - l_u , la longueur de la poutre après rupture,
 - l_0 , la longueur initiale de la poutre
- déformation transversale : $\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} = -\nu \cdot \varepsilon$, avec :
 - d , le diamètre initial de la poutre,
 - Δd , la variation de diamètre de la poutre après rupture,
 - ν (lettre grecque nu), coefficient de Poisson du matériau (pour les aciers, $\nu \approx 0,3$).

5. Sollicitation de cisaillement

(non spécifique au modèle poutre)

Soit une barre que l'on cisaille :



5.1 Torseur de cohésion :

$$\mathcal{T}_{\text{cohésion}} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Quand dans le torseur de cohésion, toutes les composantes sont nulles, sauf une composante de la résultante qui est perpendiculaire à la direction de la poutre (ici $\vec{x}$), la poutre est sollicitée en **cisaillement**. L'effort F est alors appelé un **effort tranchant**.

5.1. Répartition des contraintes

Comme l'effort F est parallèle à la coupure S , on parle de **contrainte tangentielle**, notée τ ou σ_T (T comme tangential à S) ou σ_{xy} (contrainte sur la coupure S de normale $\vec{x}$ et suivant la direction $\vec{y}$).

En première approche (modèle simple), la contrainte tangentielle est considérée uniforme en tous points de la coupure S , avec $\tau = \frac{F}{S_0}$.

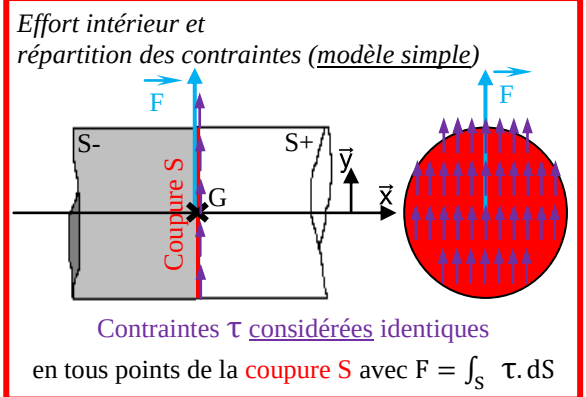
5.2. Rigidité et résistance

Pour limiter les déformations, il faut augmenter la section S_0 .

Pour être toujours dans le domaine élastique, il faut que : $\tau = \frac{F}{S_0} \leq 0,5 \cdot \frac{R_{e,s}}{s}$ (0,5 pour les « aciers doux » à 0,8 pour les « aciers durs »), avec s coefficient de sécurité.

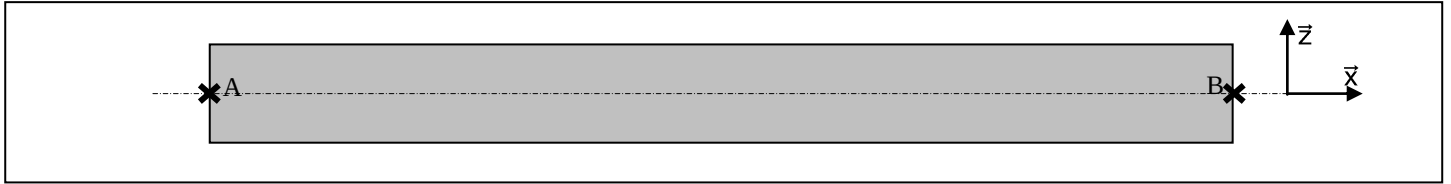
5.3. Loi de comportement : $\tau = G \cdot \gamma \approx G \cdot \frac{d}{\text{jeu}}$ (γ en radian)

avec G , le module d'élasticité transversal ou module de Coulomb donné par la relation : $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

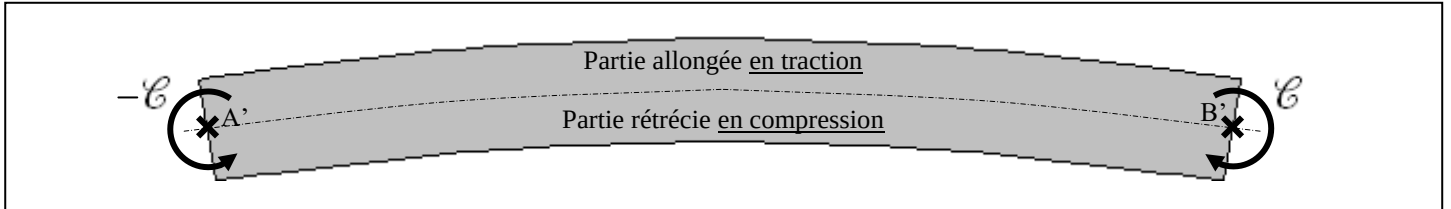


6. Sollicitation de flexion pure

Soit la barre suivante :



Après avoir appliqué 2 couples à chaque extrémité (cas de la flexion pure), la partie supérieure s'est allongée, et la partie inférieure s'est rétrécie. La partie supérieure est donc en traction, et la partie inférieure en compression :



La fibre moyenne correspond à la ligne joignant tous les centres des sections de la bar. Dans le cas d'un arbre cylindrique, $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$, et la fibre moyenne n'est alors ni en traction, ni en compression.

6.1. Torseur de cohésion :

$$\mathcal{C}_{\text{cohésion}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{\mathcal{C}} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Quand dans le torseur de cohésion, toutes les composantes sont nulles, sauf une composante du moment qui est perpendiculaire à la direction de la poutre (ici $\vec{x}$), la poutre est sollicitée en **flexion pure**.

6.2. Répartition des contraintes

Les contraintes sont d'autant plus importantes que l'on s'éloigne de la fibre moyenne. Au niveau de cette fibre moyenne, les contraintes sont nulles.

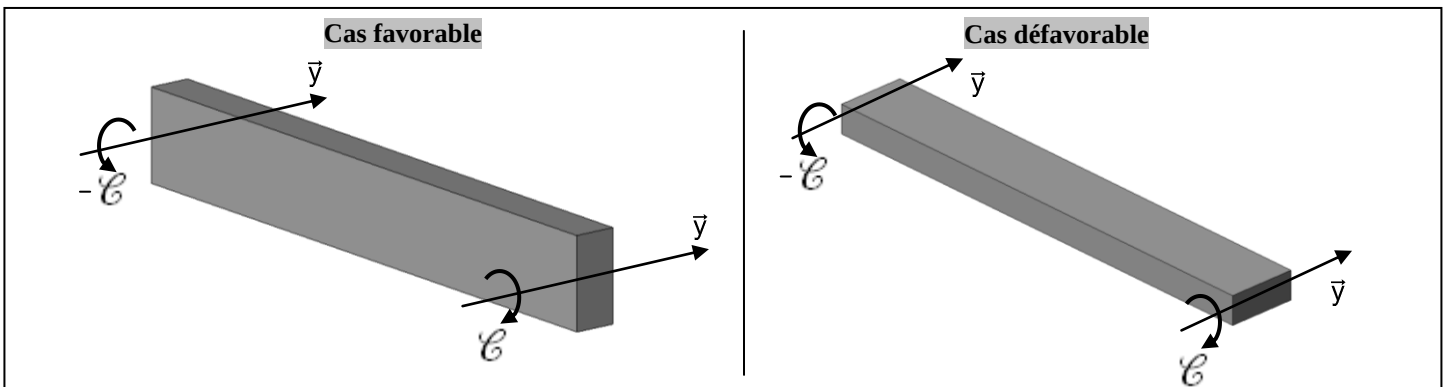
Ce sont des **contraintes normales** (à la coupure S).

Pour le calcul des contraintes, voir le chapitre 8 sur la flexion simple qui est plus courante que cette flexion pure.

6.3. Rigidité et résistance

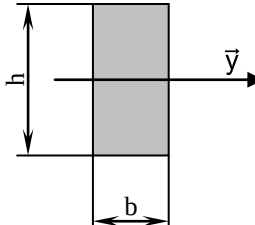
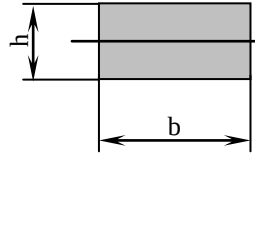
Pour limiter les déformations et augmenter la résistance :

1. Il faut bien orienter la poutre par rapport aux sollicitations de flexion :



La grandeur géométrique qui différencie ces 2 cas, s'appelle un moment quadratique : $I_{G\vec{y}} = \int_S z^2 \cdot dS$

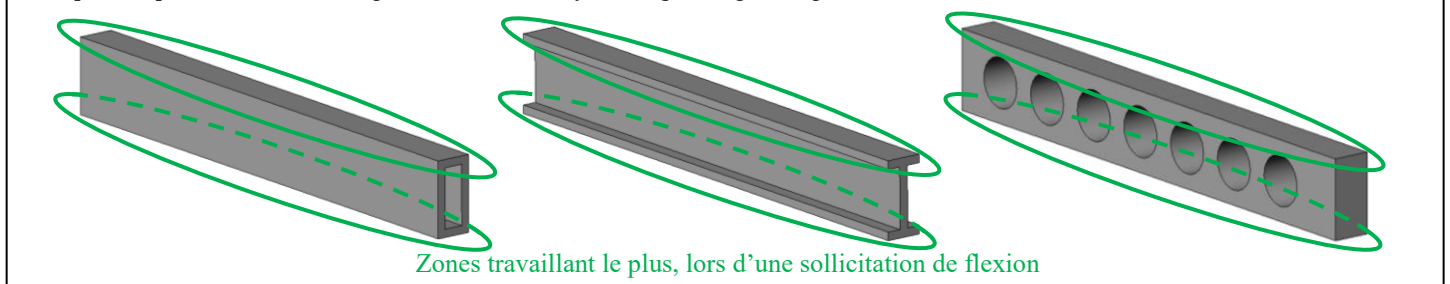
Pour une section circulaire pleine : $I_{G\vec{y}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$, et pour une section rectangulaire pleine : $I_{G\vec{y}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$:

 $I_{G\bar{y}} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 6667 \text{ mm}^4$	 $I_{G\bar{y}} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 10^3}{12} = 1667 \text{ mm}^4$
---	---

Plus le moment quadratique est important, plus la poutre est rigide et résistante en flexion.

2. La zone proche de la fibre moyenne est la partie la moins utile pour résister face à la sollicitation de flexion car cette zone ne se déforme quasiment pas. Avec la même masse, une poutre avec une dimension transversale (h) plus importante, mais « évidée » au niveau de la fibre moyenne, est plus résistante qu'une poutre pleine de même masse. Il faut néanmoins un lien entre les parties supérieure et inférieure sous peine d'avoir une certaine instabilité de la poutre, comme du flambement sur la partie comprimée.

Exemples de poutres « évidées », plus résistantes en flexion qu'une poutre pleine de même masse

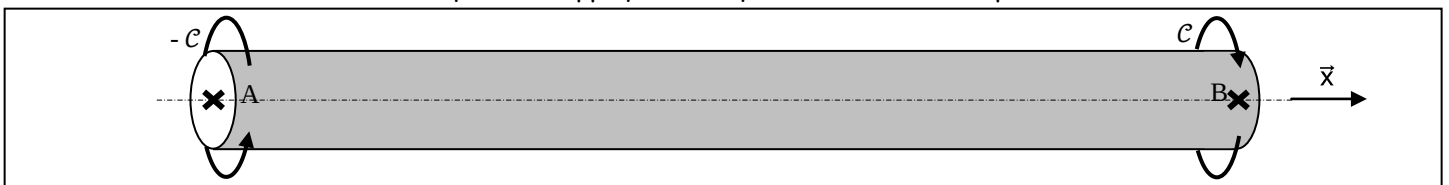


6.4. Loi de comportement

Pour le calcul de la déformée, voir le chapitre 8 sur la flexion simple qui est plus courante que cette flexion pure.

7. Sollicitation de torsion : théorie valable uniquement pour des barres cylindriques

Soit la barre suivante sur laquelle on applique à chaque extrémité un couple suivant l'axe de la barre :



Cette barre est alors soumise à de la **torsion**.

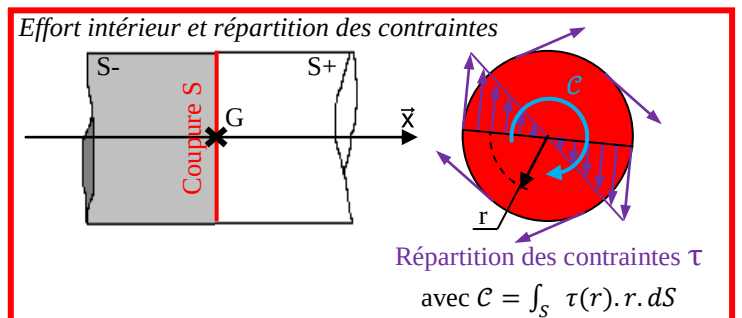
7.1. Torseur de cohésion :

$$\mathcal{C}_{\text{cohésion}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{c} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

Quand dans le torseur de cohésion, toutes les composantes sont nulles, sauf une composante du moment qui est parallèle à la direction de la poutre (ici $\vec{x}$), la poutre est sollicitée en **torsion**.

7.2. Répartition des contraintes

Les contraintes sont d'autant plus importantes que l'on s'éloigne de la fibre moyenne. Au niveau de cette fibre moyenne, les contraintes sont nulles.



Ce sont des **contraintes tangentielles** notées τ ou σ_T (T comme tangentiel à S) ou $\sigma_{r\theta}$, avec $\tau = \frac{c}{r} = \frac{c \cdot r}{r^2}$ où :

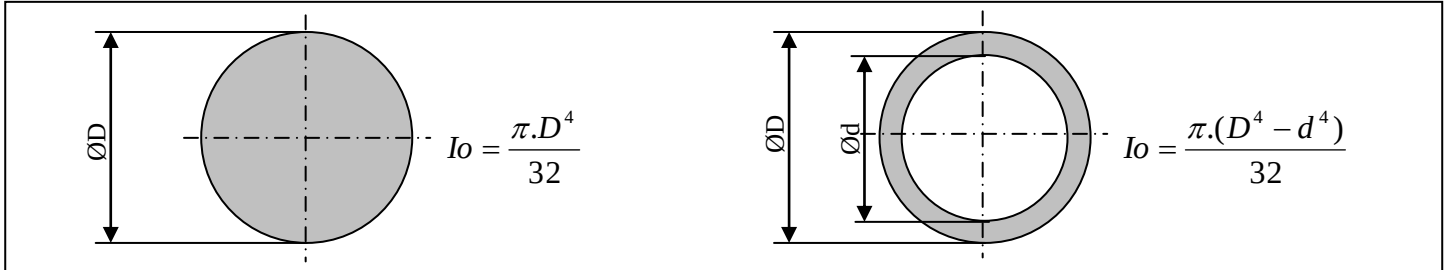
- C , est le couple de torsion,
- I_0 , le moment quadratique polaire expliqué ci-après,
- r , le rayon où la contrainte est calculée.

7.3. Rigidité et résistance

Plus on s'écarte de la fibre moyenne, plus les contraintes sont importantes. En conclusion, la partie externe de la poutre travaille beaucoup en terme de rigidité et de résistance, contrairement à la partie interne de la poutre qui ne sert quasiment pas.

Pour augmenter la rigidité et la résistance, il faut donc augmenter le diamètre de la poutre, et la poutre peut être évidée (pour limiter la masse).

Dans le cas de la torsion, la grandeur géométrique qui caractérise la poutre, s'appelle le moment quadratique polaire : $I_o = \int_S r^2 \cdot dS$. Pour un arbre plein et un arbre creux, les moments quadratiques polaires sont donnés par les formules suivantes :



Plus ce moment quadratique est important, et plus la poutre résistera et se déformera peu.

Pour être toujours dans le domaine élastique, il faut que : $\tau = \frac{c}{I_o} \leq 0,5 \cdot \frac{Re}{s}$ (0,5 pour les « aciers doux » à 0,8 pour les « aciers durs »), avec s coefficient de sécurité.

7.4. Loi de comportement

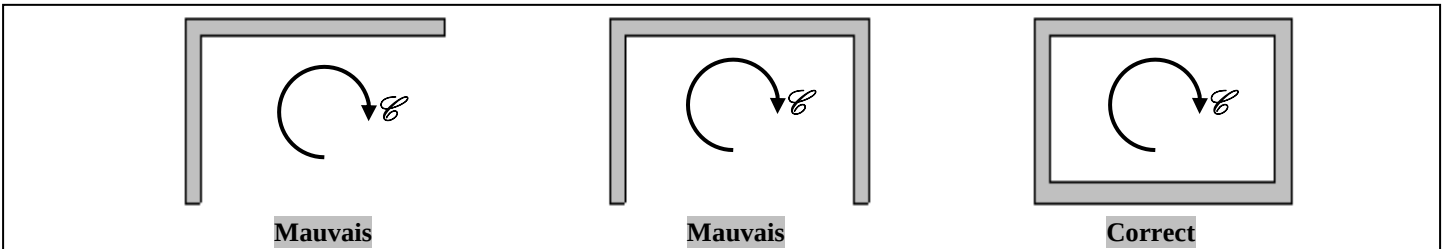
La déformation angulaire entre les 2 extrémités de la poutre est donnée par la formule :

$$\theta = \frac{c}{G \cdot I_o} \cdot L \text{ (résultat en radian)}$$

avec G le module d'élasticité transversal et L la longueur de la poutre.

7.5. Remarque concernant les sections non circulaires

Face à une sollicitation de torsion, une poutre résiste beaucoup mieux avec une section « fermée » qu'avec une section « ouverte » :

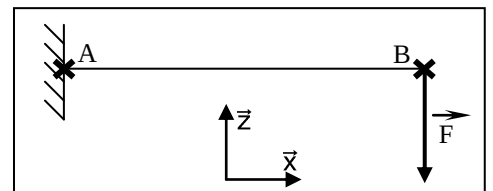


8. Sollicitation de flexion simple

La flexion simple se différencie de la flexion pure au niveau du torseur de cohésion avec 2 composantes non-nulles, une sur la résultante et l'autre sur le moment, comme dans l'exemple suivant.

Soit la poutre suivante encastree dans un mur en A, avec un effort appliqué en B :

On pose $L = AB$.



8.1. Détermination des actions mécaniques s'appliquant sur la poutre

En isolant la poutre AB, puis en lui appliquant le PFS, et connaissant

on trouve :

$$\mathcal{C}_{\text{mur / poutre}}^A = \begin{Bmatrix} \vec{A}_{\text{mur/poutre}} \\ \vec{M}_{A,\text{mur/poutre}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -F \cdot L \\ F & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{\text{effort F / poutre}}^B = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{Bmatrix}$$

8.2. Détermination du torseur de cohésion

D'après la définition du torseur de cohésion :

$$\mathcal{C}_{\text{cohésion}} = + \mathcal{C}_{\text{Extérieur / S+}} = - \mathcal{C}_{\text{Extérieur / S-}}$$

On peut donc isoler soit S-, soit S+ :

Si on isole S+ (avec S-, le résultat final serait le même), la seule action mécanique extérieure est celle produite par l'effort $\vec{F}$ en B. On obtient donc le torseur de cohésion (à exprimer en G, centre de gravité de la coupure entre S- et S+) :

$$\mathcal{C}_{\text{cohésion}} = + \mathcal{C}_{\text{Extérieur / S+}} = \mathcal{C}_{\text{effort F / S+}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{\mathcal{M}}_{G,F} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & F \cdot (L-x) \\ -F & 0 \end{array} \right\}_G$$

Comme un **effort tranchant** apparaît (résultante non nulle) en plus du **moment de flexion**, la poutre est sollicitée en **flexion simple**, équivalente à la superposition d'une **flexion pure** et d'un **cisaillement**. Pour s'assurer être dans le domaine élastique, il faut utiliser un **critère de résistance** permettant de combiner les 2 sollicitations.

8.3. Critère de résistance

Pour être toujours dans le domaine élastique, voici 2 critères de résistance possibles **dans le cas de la flexion simple** :

- **critère de Tresca** : $\sigma_{\text{équivalent}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \frac{R_e}{s}$
- **critère de Von Mises** : $\sigma_{\text{équivalent}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \frac{R_e}{s}$

avec :

- σ , la contrainte normale générée par la sollicitation de flexion donnée par la relation : $\sigma = \frac{M f_y}{I_{Gy}} = \frac{M f_y}{I_{Gy}} \cdot z$,
z étant la distance entre le point étudié et la fibre moyenne (voir figure du chapitre 6.2),
- τ , la contrainte tangentielle générée par la sollicitation de cisaillement donnée par la relation : $\tau = \frac{F}{S_0}$,
- s, coefficient de sécurité.

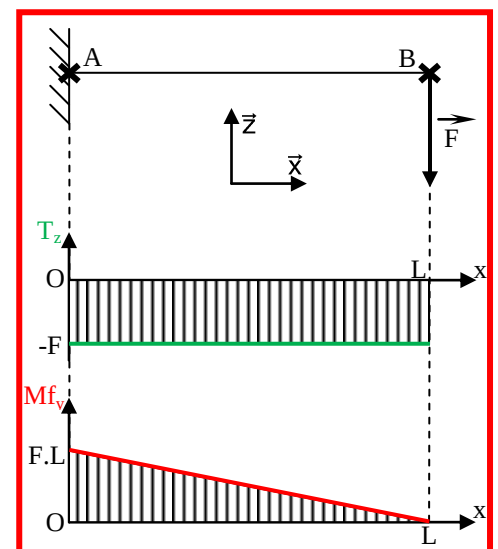
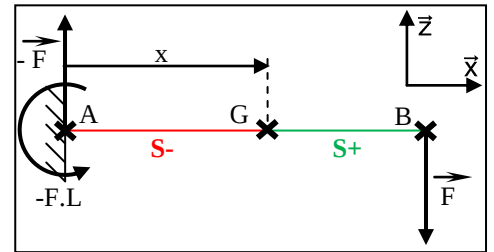
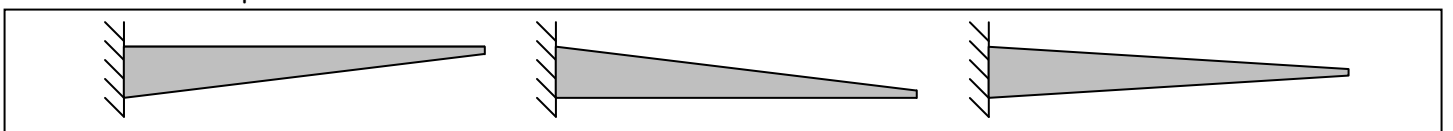
8.4. Tracé des diagrammes des efforts intérieurs

A partir du torseur de cohésion, on peut tracer les **diagrammes des efforts intérieurs**, celui du moment de flexion M_{fy} et celui de l'effort tranchant T_z :

Ces diagrammes permettent d'identifier les endroits les plus sollicités. Dans ce cas de chargement, l'effort tranchant T_z est constant sur toute la longueur de la poutre, tandis que le moment de flexion M_{fy} est maximal en A. L'endroit le plus sollicité est donc en A, au niveau de l'encastrement.

8.5. Rigidité et résistance

Pour augmenter la rigidité et la résistance, il faut augmenter le moment quadratique, notamment aux endroits où le moment de flexion est le plus important. Dans ce cas de chargement, sachant que pour augmenter le moment quadratique, il vaut mieux jouer sur la hauteur h que sur la largeur b (voir chapitre 6.3), l'allure idéale de la poutre serait donc l'une des suivantes :

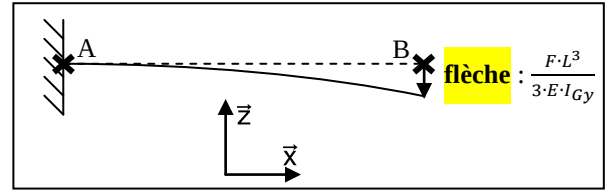


8.6. Loi de comportement : $z''(x) = \frac{M_{fy}(x)}{E \cdot I_{Gy}}$, avec $z(x)$ l'équation de la déformée de la poutre

Pour déterminer la déformation en tout point de la poutre, il faut intégrer 2 fois de suite $z''(x)$, puis rechercher les constantes d'intégration, à l'aide de conditions géométriques aux points d'appuis :

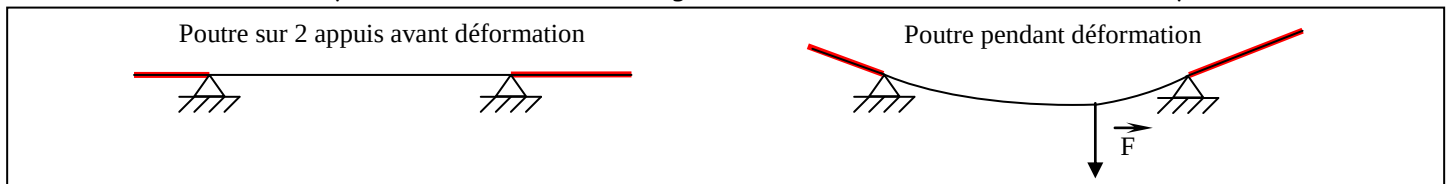
- pente nulle au niveau de l'encastrement en A : $z'(x_A) = 0$
- déplacement nul au niveau de l'encastrement en A : $z(x_A) = 0$

En posant $x_A = 0$ et en intégrant 2 fois $z''(x) = \frac{F \cdot (L-x)}{E \cdot I_{Gy}}$,
on obtient : $z(x) = \frac{F \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I_{Gy}} \cdot (x - 3 \cdot L)$, soit la déformée ci-contre :

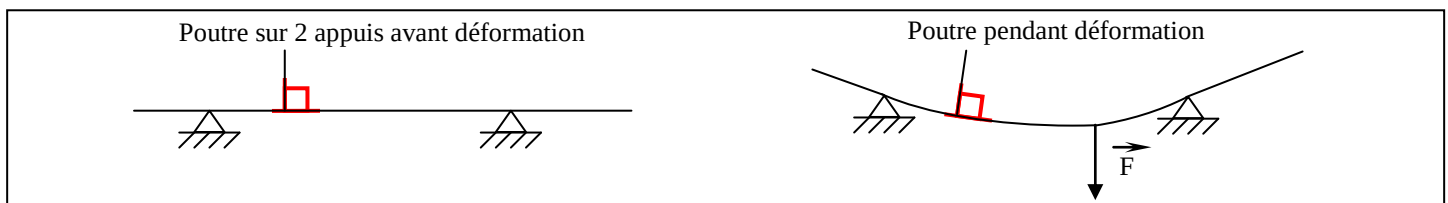


8.7. Compléments sur la déformation des poutres en flexion

- les parties « externes » au chargement et aux points d'appuis ne se déforment pas, mais elles se déplacent (si elles sont rectilignes avant déformation, elles le restent pendant) :



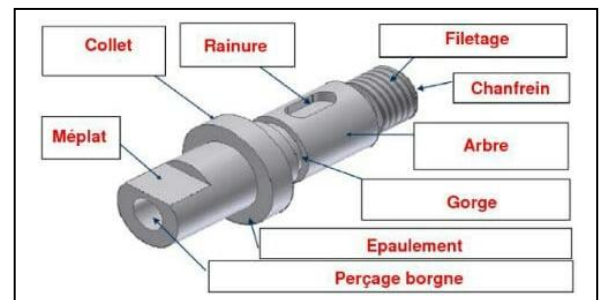
- localement, les angles sont toujours conservés :



9. Concentration de contraintes

D'après la définition d'une poutre, la section doit évoluer faiblement et progressivement pour que les calculs soient relativement corrects.

Sur un arbre, souvent assimilé à une poutre, il y a toujours quelques endroits où la section évolue rapidement, comme des épaulements, des rainures de clavette, des gorges de circlips... A ces endroits, les contraintes peuvent augmenter considérablement. On parle alors de **concentrations de contraintes**. Pour estimer une contrainte à un de ces endroits, il faut calculer la contrainte avec les formules données précédemment, et la multiplier par un coefficient de contrainte (non donné dans ce cours).



10. Fatigue

Quand l'effort appliqué n'est pas constant, et qu'il varie sur un certain nombre de cycles (par exemple, $F = F_0 + F_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)$), le matériau **fatigue** : les résistances élastique et à la rupture déterminées expérimentalement pour chaque matériau diminuent avec le nombre de sollicitations effectués sur celui-ci.

Ci-contre, une courbe de Wöhler (résistance en fatigue en fonction du nombre de cycles) d'un alliage d'aluminium illustre ce phénomène :

Des modèles relativement compliqués existent pour prendre en compte ce phénomène. Dans le cadre d'un avant-projet de conception, le coefficient de sécurité évoqué dans ce document sera majoré.

