Nombres complexes-adaptation maths

ENSAM

2024

Eléments de cours

1. **Définition** : i est défini comme l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$.
2. **Puissances de i** :
   - $i^1 = i$
   - $i^2 = -1$
   - $i^3 = -i$
   - $i^4 = 1$

   Cette séquence se répète pour les puissances supérieures.
3. **Inverse de i** : $\frac{1}{i}$ peut être calculé comme suit :
$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$
   Donc, $\frac{1}{i} = -i$. Cette propriété est utile pour simplifier des expressions complexes.
4. **Forme algébrique** : Un nombre complexe z s'écrit sous la forme $z = a + bi$, où a est la partie réelle et b la partie imaginaire.
5. **Conjugué** : Le conjugué de $z = a + bi$ est $\bar{z} = a - bi$.
6. **Module** : Le module de $z = a + bi$ est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
7. **Argument** : L'argument de $z = a + bi$ est $\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a})$, avec des ajustements selon le quadrant.
8. **Forme exponentielle** : $z = |z|e^{i\theta}$, où $\theta = \arg(z)$.
9. **Formule d'Euler** : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
10. **Formule de Moivre** : $(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$
11. **Multiplication** : $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

12. **Division** : $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

13. **Racines n-ièmes** : Les n racines n-ièmes de z sont données par : $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}))$, pour $k = 0, 1, ..., n-1$

Exercices nombres complexes

Exercice 1

Soient $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$ et $z_2 = 1 - i$.

a) Calculer le module et l'argument de z_1, z_2 et z_1/z_2.

b) Mettre z_1/z_2 sous la forme algébrique.

c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2

Linéariser

a) $\cos^4 x$,

b) $\cos^2 x \sin x$.

Exercice 3

(Formule de Moivre) Calculer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice 4

On donne le nombre complexe $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

a) Calculer u^2 et u^4.

b) Calculer le module et un argument de u^4.

c) En déduire le module et un argument de u.

d) En déduire les valeurs de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$, puis de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 5 (Application en électricité)

Attention : En électricité, le complexe i est noté j afin de ne pas le confondre avec i, l'intensité d'un courant électrique. Ainsi, dans la suite de l'exercice, on a $j^2 = -1$.

En électricité, on peut caractériser le comportement d'un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdale avec un nombre complexe que l'on appelle impédance complexe.

Ainsi, l'impédance complexe d' :

- une résistance est $Z_R = R$ où R est la valeur de la résistance en ohms ;
- une bobine est $Z_L = jL\omega$ où L est l'inductance en henry de la bobine et ω la pulsation du courant en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$;
- un condensateur est $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$ où C est la capacité en farad du condensateur et ω la pulsation du courant en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

On associe une résistance, une bobine et un condensateur en série. L'impédance complexe de l'association est alors :

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C$$

a) La partie résistive de l'impédance complexe Z est la partie réelle de Z. Donner son expression.

b) La réactance X correspond à la partie imaginaire de l'impédance complexe Z. Donner son expression.

c) L'impédance de l'association (en ohms) correspond au module de l'impédance complexe. Donner son expression.

d) Le déphasage entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe. Donner son expression.

Corrections

Correction de l'exercice 1

a) Calcul des modules et arguments :
Pour $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$:

- Module : $|z_1| = \sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- Argument : $\arg(z_1) = \arctan(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}) = -\frac{\pi}{6}$

Pour $z_2 = 1 - i$:

- Module : $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Argument : $\arg(z_2) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Pour z_1/z_2, nous calculerons d'abord le quotient avant de déterminer le module et l'argument.

b) Mise de z_1/z_2 sous forme algébrique :

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})}{1-i} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) \cdot (1+i)}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) \cdot (1+i)}{2} \\
&= \frac{1}{4}((\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)) \\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} + 2) \\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + 2 + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})) \\
&= \frac{\sqrt{6}+2}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

Donc, z_1/z_2 sous forme algébrique est : $\frac{\sqrt{6}+2}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Module de z_1/z_2 : $|z_1/z_2| = \sqrt{(\frac{\sqrt{6}+2}{4})^2 + (\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})^2} = 1$

Argument de z_1/z_2 : $\arg(z_1/z_2) = \arctan(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2}) = \frac{\pi}{12}$

c) Déduction des valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$:

Comme $\frac{z_1}{z_2} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, on peut déduire :

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6}+2}{4} \\
\sin\frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 2

Correction :

a. Pour $\cos^4 x$:

Utilisons $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$:

$\cos^4 x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^4$

$= \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$

$= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$

b. Pour $\cos^2 x \sin x$:

Utilisons $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$:

$\cos^2 x \sin x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^2 \cdot \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
$= \frac{1}{8i}(e^{3ix} - e^{-ix} + e^{ix} - e^{-3ix})$
$= \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x)$

Correction de l'exercice 3

(Formule de Moivre) Calculer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{10}$.

Correction : Utilisons la formule de Moivre : $(e^{ix})^n = \cos nx + i \sin nx$
Développons $(e^{ix})^5$:
$(e^{ix})^5 = (\cos x + i \sin x)^5$
$= \cos^5 x + 5i \cos^4 x \sin x - 10 \cos^3 x \sin^2 x - 10i \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos x \sin^4 x + i \sin^5 x$
La partie réelle de cette expression est $\cos 5x$, donc :
$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$
Utilisant $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on obtient :
$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$
Pour trouver $\cos \frac{\pi}{10}$, résolvons $\cos(5 \cdot \frac{\pi}{10}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$:
$16 \cos^5 \frac{\pi}{10} - 20 \cos^3 \frac{\pi}{10} + 5 \cos \frac{\pi}{10} = 0$
Posons $y = \cos \frac{\pi}{10}$. L'équation devient : $16y^5 - 20y^3 + 5y = 0$
Factorisons : $y(16y^4 - 20y^2 + 5) = 0$
La solution positive est $y = \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

Correction de l'exercice 4

a. Calculons u^2 :
$u^2 = (\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}})^2$
$= (2-\sqrt{2}) - (2+\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$= -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}(1+i)$
Calculons u^4 :
$u^4 = (-2\sqrt{2}(1+i))^2 = 8(1+2i+i^2) = 8$

b. Pour u^4 :
Module : $|u^4| = 8$
Argument : $\arg(u^4) = 0$ (car u^4 est réel positif)

c. Pour u :
Module : $|u| = \sqrt[4]{|u^4|} = \sqrt[4]{8} = \sqrt{2\sqrt{2}}$
Argument : $\arg(u) = \frac{1}{4}\arg(u^4) = -\frac{\pi}{8}$ (car u^4 est réel positif, l'argument de u doit être négatif pour que u^2 soit dans le troisième quadrant)

d. $u = |u|e^{-i\pi/8} = \sqrt{2\sqrt{2}}(\cos(\frac{-\pi}{8}) - i\sin(\frac{\pi}{8}))$

Donc :

$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$ et $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$

Pour $\frac{\pi}{8}$, utilisons les formules de l'angle moitié :

$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Correction de l'exercice 5

1. La partie résistive de l'impédance complexe Z est la partie réelle de Z. Donner son expression.

   Correction :

   $$Z = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

   La partie réelle de Z est donc R.

2. La réactance X correspond à la partie imaginaire de l'impédance complexe Z. Donner son expression.

   Correction : La partie imaginaire de Z est $L\omega - \frac{1}{C\omega}$. Donc,

   $$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

3. L'impédance de l'association (en ohms) correspond au module de l'impédance complexe. Donner son expression.

   Correction : Le module de Z est donné par :

   $$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

4. Le déphasage entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe. Donner son expression.

   Correction : L'argument de Z est donné par :

   $$\arg(Z) = \arctan(\frac{X}{R}) = \arctan(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R})$$