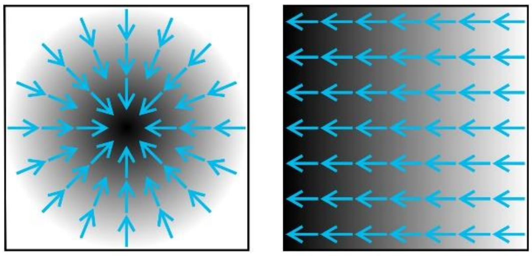
1. Points de vue mathématique et physique

Point de vue mathématique :

Le gradient d'une fonction de plusieurs variables en un point est un vecteur qui caractérise la variabilité de cette fonction au voisinage de ce point.

Point de vue physique :

Le gradient est un vecteur indiquant comment une grandeur physique varie dans l'espace.



Figures 1. Représentations du gradient d'une fonction dont la valeur est d'autant plus élevée que la couleur est sombre

2. Taux de variation d'une fonction

2.1. Fonction d'une seule variable

Soit **f** une fonction scalaire dépendant d'une seule variable : **x**.
On considère un déplacement élémentaire dans la direction x : dx
Le taux de variation de la fonction s'exprime par : $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$
On peut déterminer la différence $df = f'(x).dx$

2.2. Fonction de plusieurs variables

Soit **f** une fonction scalaire dépendant des variables : **x, y et z**.
On considère maintenant un vecteur déplacement élémentaire dans l'espace : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$
(M et M' sont deux points très proches)

Dans un repère cartésien : $\overrightarrow{dl} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$

Le taux de variation dans la direction $\overrightarrow{dl}$ devient : $\overrightarrow{grad}(f)$

On peut déterminer la différentielle de la fonction $f(x, y, z)$: $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dy$

Physiquement df représente une variation élémentaire de la fonction f : $f(M') - f(M)$

3. Champ d'une grandeur physique

Le champ d'une grandeur physique correspond à un espace où, en chaque point, cette grandeur est définie.

Par conséquent si une grandeur peut être mesurée ou exprimée en tous points d'un espace donné alors il est possible de lui associer un champ. On peut ainsi associer un champ à des grandeurs aussi diverses que la température, la pression, la vitesse d'écoulement d'un fluide…

3.1. Champ scalaire

Un champ est dit scalaire s'il est associé à une grandeur physique décrite uniquement par une valeur numérique.

★ Exemples de grandeurs physiques associées à des champs scalaires : température, pression, masse volumique…

3.2. Champ vectoriel

Un champ est dit vectoriel s'il est associé à une grandeur physique pouvant être modélisée par vecteur.
Pour rappel, un vecteur doit être caractérisée par :

- une valeur (norme ou module du vecteur)
- une direction,
- un sens et
- une origine

★ Exemples de grandeurs physiques pouvant être associées à un champ vectoriel : vitesse, accélération, force…

4. Définition de l'opérateur gradient

Soit une fonction dépendant de paramètres spatiaux.

Au champ scalaire f est associé à un champ vectoriel $\overrightarrow{grad}(f)$ appelé gradient de f tel que : $df = \overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dl}$

5. Expression de l'opérateur gradient dans différents repères

- Cordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{f(x,y,z)} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}.\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}.\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}.\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$

- Cordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{f}(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}}.\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta}.\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}.\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$

- Cordonnées sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{f}(\mathrm{r},\theta,\varphi) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}}.\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta}.\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \varphi}.\overrightarrow{\mathrm{u}_\varphi}$

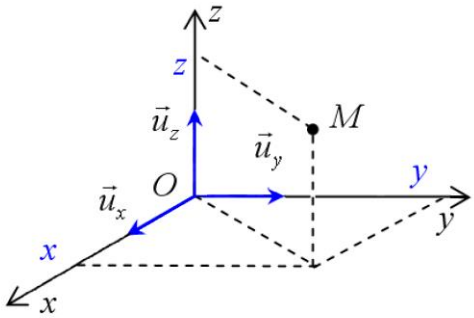


Figure 2. Repère cartésien

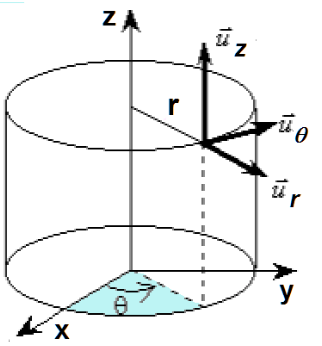


Figure 3. Repère cylindrique

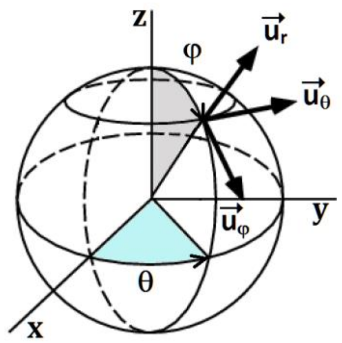


Figure 3. Repère sphérique

6. Propriétés de l'opérateur gradient

En un point M où le gradient de f est non nul :

- $\overrightarrow{grad}(f)$ est orienté vers les points où la valeur de f est la plus élevée
- $\overrightarrow{grad}(f)$ est localement orthogonal à la surface iso f (surface correspondant à $f = cste$)
- La norme de $\overrightarrow{grad}(f)$ renseigne sur l'amplitude de la variation de la fonction f associée à un déplacement $\overrightarrow{dl}$.

7. Exemple d'utilisation : loi de Fourier

La loi de Fourier modélise le transfert thermique par conduction.

$$\boxed{\overrightarrow{\Phi}_{\mathrm{cond}} = -\lambda\,\mathrm{S}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{T})}$$

$\overrightarrow{\Phi}_{\mathrm{cond}}$	Vecteur flux thermique transmis par conduction (W)
λ	Conductivité thermique (W.m^{-1}.K^{-1})
S	Aire de surface traversée par le flux de chaleur (m^2)
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{T})$	Gradient de température (K.m^{-1} ou °C.m^{-1})

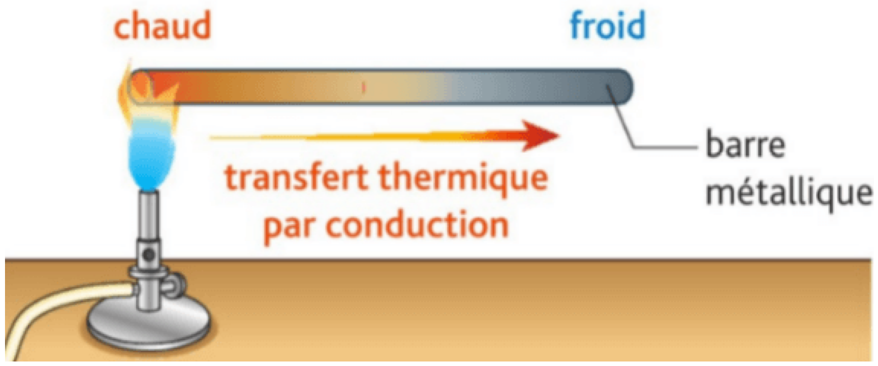


Figure 4. Transfert thermique par conduction