Travaux dirigés de méthodes numériques

Problèmes physiques abordés

- *Problème unidimensionnel* (*traité en TD*) : conductivité thermique dans une barre, avec apport de la chaleur.
- *Problème bidimensionnel de Poisson* (*non traité en TD*) : flexion d'une plaque élastique, chargée perpendiculairement à son plan moyen de repos.

Plan

- T.D. n^o 1: formulations intégrales fortes et faibles, et méthode de Galerkin.
- T.D. n^o 2: méthode de Ritz.
- T.D. n^o 3: méthode des Eléments Finis.

Notations, conventions, et instructions

- Tout vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$ (avec $p \geq 2$) sera toujours (implicitement) décrit par rapport à une base vectorielle *orthonormée* de $\mathbb{R}^p$, et de manière à ce que ses composantes $a_i \in \mathbb{R}$ forment une matrice-colonne telle que : $\vec{a} = \left[a_i\right]_{i=1,\ldots,p} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$.
  La *transposée* de cette matrice-colonne est alors représentée comme la matrice-ligne : $\vec{a}^{\,t} = [a_1 \ \ldots a_p]$.
- La matrice rectangulaire $M = \left[M_{ij}\right]_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,q}} \in \mathcal{M}_{p\times q}$ d'une quelconque application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ sera représentée avec ses composantes $M_{ij} \in \mathbb{R}$ disposées suivant

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} j^{\,\text{ème}} \text{ colonne} \\ \downarrow \end{array} \\
M = & \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1j} & \cdots & M_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{i1} & \cdots & M_{ij} & \cdots & M_{i\,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{p1} & \cdots & M_{pj} & \cdots & M_{p\,q} \end{bmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \quad .
\end{array}
$$

Sa transposée est alors représentée selon : $M^{\,t} = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{i1} & \cdots & M_{p1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{1j} & \cdots & M_{ij} & \cdots & M_{pj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{1q} & \cdots & M_{iq} & \cdots & M_{pq} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{q\times p}$.

Ces matrices M et $M^{\,t}$ sont carrées lorsque les nombres de lignes et de colonnes sont égaux (*i.e.*

$p = q$), et nous simplifierons alors la notation de leur espace d'appartenance selon $\mathcal{M}_{p\times p} = \mathcal{M}_p$. $Id = [\delta_{ij}]_{i,j=1\dots,p}$ désignera la matrice identité de cet espace de matrices.

- Tout opérateur $\mathcal{D}$ d'intégration ou de dérivation s'appliquera sur les précédents vecteurs et matrices selon : $\mathcal{D}\vec{a} = [\mathcal{D}a_i]_{i=1,\dots,p} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathcal{D}M = \left[\mathcal{D}M_{ij}\right]_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} \in \mathcal{M}_{p\times q}$.

- Le produit scalaire deux vecteurs <u>$\vec{a}$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$</u> s'identifiera aux produits matriciels

$$\vec{a} \bullet \vec{b} \;\equiv\; \vec{a}^{\,t}\,\vec{b} \;\equiv\; \left[\vec{a}^{\,t}\,\vec{b}\right]^t \;=\; \vec{b}^{\,t}\,\vec{a} \;=\; \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} a_1 & \dots & a_p \end{array}\right]}_{transpos\acute{e}e\ de\ \vec{a}} \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{array}\right] \;=\; \sum_{i=1}^{p} a_i\, b_i \in \mathbb{R} \quad .$$

  ⋆ On fera attention à <u>transposer la première matrice-colonne et non la seconde</u> dans ces produits pour obtenir un (produit) scalaire, car $\vec{a}^{\,t}\,\vec{b} \neq \vec{a}\,\vec{b}^{\,t} \in \mathcal{M}_p$.
  En effet, on a même plus généralement pour deux vecteurs $\vec{a} \in \mathbb{R}^p$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^q$ le résultat suivant

$$\vec{a}\,\vec{b}^{\,t} \equiv \left[\vec{b}\,\vec{a}^{\,t}\right]^t = \left[\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_p \end{array}\right] \underbrace{\left[b_1\ \dots\ b_j\ \dots\ b_q\right]}_{transpos\acute{e}e\ de\ \vec{b}} = \left[\begin{array}{ccccc} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_j & \dots & a_1 b_q \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_i b_1 & \dots & a_i b_j & \dots & a_i b_q \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_p\, b_1 & \dots & a_p\, b_j & \dots & a_p\, b_q \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{p\times q}$$

  Néanmoins, ce dernier type de produit de matrices-colonnes – qui est équivalent à des produits tensoriels non-contracté de 2 vecteurs – interviendra dans nos analyses discrètes.

- La norme euclidienne d'un vecteur $\vec{a} = [a_i]_{i=1,\dots p} \in \mathbb{R}^p$ a pour définition $\|\vec{a}\| \overset{d\acute{e}f}{=} \sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}} \equiv \sqrt{\vec{a}^t\,\vec{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} a_i^2}$.

- Enfin, les intégrales seront calculées numériquement, <u>mais de manière exacte</u>, à partir des formules de "quadrature" qui seront données au fur et à mesure à la fin de chaque énoncé.

TD1: Formulations Intégrales et méthode de Galerkin

Problème 1: Conduction de chaleur dans une barre.

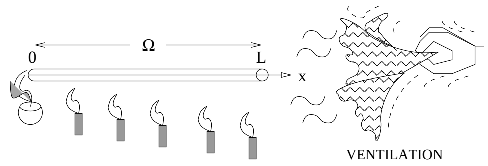


Figure 1: *Expérience très naïve (pour petits budgets ...).*

On se propose de résoudre numériquement le problème suivant:

$$(\mathcal{P}_0)\left\{\begin{array}{l}\textit{Trouver la fonction de température } T \textit{ qui satisfait le système d'équations (différentielles) suivant:}\\ k\dfrac{d^2T}{dx^2}(x) = c_1\,x \;-\; c_o\;,\;\forall\,x\in\;\Omega =]0,L[\;;\\ \text{avec}\quad T(0)=T_o\quad\text{et}\quad k\dfrac{dT}{dx}(L)=h\;.\end{array}\right.$$

Ici, les coefficients de conductivité thermique k et de l'apport de chaleur (c_o, c_1), ainsi que le flux ponctuel de chaleur h, sont constants. Nos solutions numériques seront comparées avec la solution analytique (et donc exacte) de ce problème thermique :

$$T_{ex}(x) = T_o + \frac{x}{k}\left[h + c_o\left(L - \frac{x}{2}\right) + \frac{c_1}{2}\left(\frac{x^2}{3} - L^2\right)\right]\quad,\ \forall x\in\bar{\Omega} = [0\,,L]\;.$$

1. *Formulations Intégrales.*
   La formulation suivante est proposée pour résoudre ce problème :

   $$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Trouver la fonction de température } T \textit{ qui satisfait l'équation intégrale suivante}\\ 0 = \displaystyle\int_0^L \phi(x)\Big[k\frac{d^2T}{dx^2}(x) + c_o - c_1x\Big]\,dx + \phi(L)\Big[h - k\,\frac{dT}{dx}(L)\Big] \;+\; \phi(0)[T_o - T(0)]\\ \textit{pour toute fonction de pondération } \phi \textit{ suffisamment régulière sur } \bar{\Omega}\;.\end{array}}$$

   (a) Cette la formulation intégrale (F.I.) est-elle forte, faible, ou/ et " simplifiée " ?

   (b) Si elle est forte, donnez la F.I. faible correspondante.

2. *Approximations polynômiales, "thermiquement non-admissibles".*
   On recherche une approximation numérique dont l'expression générale est (pour $m \in \mathbb{N}^*$)

   $$T_m(x) \;=\; \sum_{j=0}^{m} N_j(x)\,\tau_j \quad\equiv\quad \underbrace{\vec{N}(x)\bullet\vec{\tau}}_{\text{produit scalaire}} \quad\equiv\quad \underbrace{\vec{N}^{\,t}(x)\;\vec{\tau}}_{\text{produit matriciel}}$$

   $$\text{avec } \vec{\tau} = \begin{bmatrix}\tau_0\\ \vdots\\ \tau_m\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \quad\text{et}\quad \vec{N} = \begin{bmatrix}N_0\\ \vdots\\ N_m\end{bmatrix} \in \left\{\begin{array}{ll}\Big[\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})\Big]^{m+1} & \text{en F.I. forte}\\ \Big[\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})\Big]^{m+1} & \text{en F.I. faible}\end{array}\right. \quad ;$$

ici les $m+1$ constantes τ_i sont les paramètres à déterminer alors que les $m+1$ fonctions de forme N_i, qui seront précisées plus loin, sont choisies de sorte à être linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ pour la F.I. forte ou dans $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ pour la F.I. faible.

(a) Appliquez la méthode de pondération de GALERKIN pour obtenir une équation matricielle du type $K\vec{\tau} = \vec{F}$, avec $K \in \mathcal{M}_{m+1}$ et $\vec{F} \in \mathbb{R}^{m+1}$.

(b) Déterminez une approximation affine T_1 (avec $m = 1$) à partir de la F.I. faible, et en prenant pour fonctions de forme les fonctions d'interpolation nodale de LAGRANGE

$$\left\{ N_0(x) = 1 - \frac{x}{L}\ ,\ N_1(x) = \frac{x}{L} \right\}\ ,\ \text{pour } m = 1\ .$$

(c) Déterminez une approximation quadratique T_2 (avec $m = 2$) à partir de la F.I. forte, et en prenant les fonctions d'interpolation nodale de LAGRANGE suivantes

$$\left\{ N_0(x) = \left(1 - \frac{2x}{L}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right), N_1(x) = \frac{4x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right), N_2(x) = \frac{x}{L}\left(\frac{2x}{L} - 1\right) \right\}\ ,\ \text{pour } m = 2$$

pour fonctions de forme. Ici, après avoir calculé K, on pourra se contenter d'admettre que

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-1}{4} & 0 \\ 1 & \dfrac{7L}{16\,k} - \dfrac{1}{4} & \dfrac{L}{2\,k} \\ 1 & \dfrac{L}{2\,k} - \dfrac{1}{4} & \dfrac{L}{k} \end{bmatrix}.$$

(d) Que constatez-vous lorsque vous comparez les approximations T_1 et T_2 avec la solution exacte T_{ex}, pour $x \in \bar{\Omega}$?

3. *Approximations polynômiales, "thermiquement admissibles".*
Reprenez l'étude précédente en recherchant une approximation numérique du type

$$T_m(x) \ = \ T_o + \sum_{j=1}^{m} N_j(x)\,\tau_j \quad \equiv \quad T_o + \vec{\tilde{N}}(x) \bullet \vec{\tilde{\tau}} \ \equiv \ T_o + \vec{\tilde{N}}^{\,t}(x)\,\vec{\tilde{\tau}}$$

$$\text{avec } \vec{\tilde{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad \vec{\tilde{N}} = \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{bmatrix} \in \begin{cases} \left[\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})\right]^m & \text{en F.I. forte} \\ \left[\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})\right]^m & \text{en F.I. faible} \end{cases} \quad ;$$

les m fonctions de forme $\{N_i\}_{i=1,\ldots,m}$ étant encore celles décrites précédemment pour $m = 1$ et 2.

⋆ *Formulaires d'intégration (1D) :*

La quadrature du "RECTANGLE" (= GAUSS-LEGENDRE d'ordre 2)

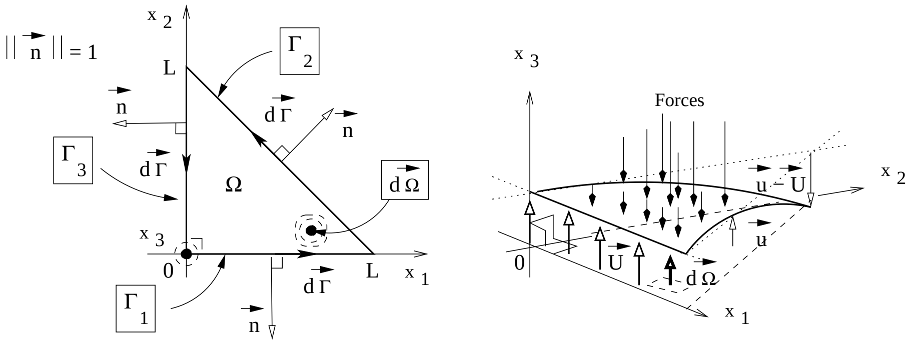
$$\int_{X_0}^{X_1} f(x)\,dx \approx \big(X_1 - X_0\big)\, f\Big(\frac{X_0 + X_1}{2}\Big)\ ,$$

est exacte pour tout polynôme affine" (et donc d'ordre inférieure) sur $\big[X_0\,,\,X_1\big]$. Celle de " SIMPSON"

$$\int_{X_0}^{X_1} f(x)\,dx \approx \frac{X_1 - X_0}{6}\Big[f(X_0) + 4f\Big(\frac{X_0 + X_1}{2}\Big) + f(X_1)\Big]$$

est exacte pour tout polynôme cubique (et donc d'ordre inférieure) sur $\big[X_0\,,\,X_1\big]$.

Problème 2 : Plaque élastique, chargée perpendiculairement à son plan moyen de repos.



(a) Au repos **(b) En déformation**

Figure 2: *Les 2 configurations caractéristiques de la plaque dans le repère cartésien* $(O; \vec{Ox_1}, \vec{Ox_2}, \vec{Ox_3})$. *Son domaine de repos est le triangle rectangle isocèle* $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ *qui est inclu dans le plan d'équation* $x_3 = 0$. *La surface* Ω *et le contour brisé* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ *sont mathématiquement recouverts (et orientés localement) par des "éléments géométriques vectoriels, et infinitésimaux", qui sont respectivement représentés par* $\vec{d\Omega}(x)$ *et* $\vec{d\Gamma}(x)$. *Ces 2 vecteurs sont toujours perpendiculaires au vecteur "normal" unitaire extérieur* $\vec{n}(x)$ *qui est défini sur* Γ, *dans le plan* $x_3 = 0$.

Le problème mécanique suivant modélise un cas d'équilibre d'une plaque élastique, mince et homogène, en flexion :

$$
(\mathcal{P}'_0) \left\{ \begin{array}{l}
\textit{Déterminer le fonction de déplacement vertical, } u \textit{, qui satisfait les équations suivantes:} \\
\mu\, \Delta u(x) = \dfrac{c}{L}\left(\dfrac{x_1}{L} - 1\right) \ , \ \forall\, \underline{\underline{x \overset{déf}{=} (x_1, x_2)}} \in \ \Omega = \,]0, L[\times]0, L - x_1[\ ; \\
u(x) = U \ , \ \forall\, x \in \Gamma_1 = [0, L] \times \{0\}\ ; \\
\mu \dfrac{\partial\, u}{\partial n}(x) = -\dfrac{c\, x_2^2}{2L\ell(x)} \ , \ \forall\, x \in \Gamma \setminus \Gamma_1 \text{ et avec } \ell(x) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}L \ , \ \forall\, x \in \Gamma_2 = \,]0, L[\,\times\{L - x_1\} \\ L \ , \ \forall\, x \in \Gamma_3 = \{0\}\times\,]0, L[\end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

Ici, la fonction ℓ mesure, autrement dit, la longueur du coté du triangle qui contient le point $x \in \Gamma \setminus \Gamma_1 = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$; le coefficient de Lamé $\mu > 0$ est une caractéristique de la plaque élastique; le chargement qui est perpendiculairement à $\bar{\Omega}$ est défini avec des constantes de densité de forces $c > 0$ et de déplacement $U \geq 0$; enfin, on applique sur u des opérateurs différentiels qui sont tels que

$$
\left\{ \begin{array}{lllll}
\Delta & \overset{déf}{=} & \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^{\,t}\, \vec{\nabla} & \overset{3D}{=} & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \overset{2D}{\sim} \quad \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \\
\dfrac{\partial}{\partial n} & \overset{déf}{=} & \vec{n} \bullet \vec{\nabla} = \vec{n}^{\,t}\, \vec{\nabla} & \overset{3D}{=} & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} n_i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \overset{2D}{\sim} \quad \sum_{i=1}^{2} n_i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i}
\end{array} \right.
$$

$$
\text{avec} \left\{ \begin{array}{lllll}
\vec{\nabla} & \overset{3D}{=} & \left[\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right]_{i=1,2,3} & \overset{2D}{\sim} & \left[\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right]_{i=1,2} \\
\vec{n}(x) & \overset{3D}{=} & [n_i(x)]_{i=1,2,3} & \overset{2D}{\sim} & [n_i(x)]_{i=1,2}
\end{array} \right. \quad \text{car} \left\{ \begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial x_3}(x) \equiv 0 \ , \ \forall x \in \bar{\Omega} \\
n_3(x) \equiv 0 \ , \ \forall x \in \bar{\Gamma}
\end{array} \right. .
$$

On vérifie aisément que $\mathcal{P}'_o$ a alors pour solution analytique

$$u_{ex}(x) = U - \frac{c\,x_2^2}{2\mu L}\left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \quad , \ \forall x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} = [0\,, L] \times [0, L - x_1] \ .$$

<u>*Approximations*</u>. Reconsidérons ce problème mécanique à partir de la F.I. forte-simplifiée suivante:

> *Trouver la fonction de déplacement u qui satisfait l'équation intégrale suivante*
> $$\begin{aligned} 0 \ = \ & \int_\Omega \phi(x)\Big[\mu\Delta u(x) + \frac{c_2}{L}\left(1 - \frac{x_1}{L}\right)\Big]\,d\Omega - \int_{\Gamma\backslash\Gamma_1} \phi(x)\Big[\mu\,\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \frac{c\,x_2^2}{2L\ell(x)}\Big]\,d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_1} \phi(x)\Big[u(x) - U\Big]\,d\Gamma \end{aligned}$$
> *pour toute fonction de pondération ϕ suffisamment régulière sur $\bar{\Omega}$.*

1. Déduisez la forme faible de la précédente F.I. , en utilisant la première formule de Green:
$$\int_\Omega g(x)\Delta f(x)\,d\Omega = \oint_\Gamma g(x)\frac{\partial f}{\partial n}(x)\,d\Gamma - \int_\Omega \big[\vec{\nabla} g(x)\big] \bullet \big[\vec{\nabla} f(x)\big]\,d\Omega$$
$$\text{où} \quad \oint_\Gamma f(x)\,d\Gamma = \int_{\Gamma_1} f(x)\,d\Gamma + \int_{\Gamma_2} f(x)\,d\Gamma + \int_{\Gamma_2} f(x)\,d\Gamma$$

2. En appliquant la méthode de Galerkin sur cette F.I. faible, établissez l'expression générique (en termes de $\vec{N}$) de l'équation matricielle $K\vec{\tau} = \vec{F}$ qui est associée à une approximation (affine et *cinématiquement non-admissible*) telle que $\quad u_3(x) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x)\,\tau_i = \vec{N}^{\,t}(x)\vec{\tau}$.

3. Calculez numériquement $K \in \mathcal{M}_3$ et $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ en prenant, pour fonctions de forme, les fonctions d'interpolation nodale de Lagrange $\quad \Big\{N_1(x) = 1 - \dfrac{x_1}{L} - \dfrac{x_2}{L}\ ,\ N_2(x) = \dfrac{x_1}{L}\ ,\ N_3(x) = \dfrac{x_2}{L}\Big\}$.

4. Déduisez-en l'expression de l'approximation (affine et *cinématiquement admissible*) suivante
$$u_3(x) = U + N_3(x)\,\tau_3 \ .$$
Comparez finalement les valeurs de cette approximation u_3 et de u_{ex} aux sommets, au barycentre $x = (L/3, L/3)$ du triangle $\bar{\Omega}$, et aux milieux des bords $\{\Gamma_i\}_{i=1,2,3}$.

⋆ <u>*Indications et formulaires d'intégration (triangle, 2D):*</u>

- Pour alléger l'écriture des calculs, n'utilisez que les expressions 2D de $\vec{\nabla}$, Δ et $\vec{n}$.
- Les éléments $d\vec{\Omega}$ sont plus spécifiquement définis comme des surfaces planes et tangentes à Ω; ils doivent former par combinaison une surface orientée, de même aire que Ω. Les éléments $d\vec{\Gamma}$ sont définis comme des segments tangents à Γ qui doivent former (par combinaison) une courbe orientée et de même longueur que Γ. Quand on les exprime en fonction des "variations" dx_1 et dx_2 ($dx_3 \equiv 0$) des coordonnées cartésiennes, on obtient $d\Omega = \|\overrightarrow{d\Omega}\| = \sqrt{\overrightarrow{d\Omega} \bullet \overrightarrow{d\Omega}} = dx_1\,dx_2 > 0$ et $d\Gamma = \|\overrightarrow{d\Gamma}\| = \sqrt{\overrightarrow{d\Gamma} \bullet \overrightarrow{d\Gamma}} = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} > 0$.
- Calculez les intégrales sur le triangle Ω en utilisant la quadrature de "Gauss-Legendre d'ordre 3" (*i.e.* qui est exacte pour tout polynôme quadratique en x_1 et x_2)
$$\int_0^L \int_0^{L-x_1} f(x)\,dx_2\,dx_1 \quad \approx \quad \frac{L^2}{6}\left[f\Big(0, \frac{L}{2}\Big) + f\Big(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\Big) + f\Big(\frac{L}{2}, 0\Big)\right] ,$$
et celles sur la frontière Γ, en utilisant les précédentes quadratures (1D) avec des bornes d'intégration respectant l'orientation de Γ .

TD2: méthode de Ritz

Problème 1: Conduction de chaleur dans une barre.

Considérons les deux problèmes thermiques suivants:

$$(\mathcal{P}_1)\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver dans l'espace fonctionnelle } V_1 = \Big\{T \in \mathcal{H}^1\Big([0,L]\Big) \text{ t.q. } T(0) = T_o\Big\}\\ \text{la fonction de température } T_{ex} \text{ minimise l'énergie potentielle}\\ J_1(T) = \displaystyle\int_0^L \frac{k}{2}\left[\frac{dT}{dx}(x)\right]^2 dx - \int_0^L \big[c_o - c_1\,x\big]\,T(x)\,dx - h\,T(L)\ ,\end{array}\right.$$

et

$$(\widetilde{\mathcal{P}}_1)\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver dans l'espace fonctionnelle } \widetilde{V}_1 = \mathcal{H}^1\Big([0,L]\Big) \times \mathcal{C}^o\Big(\{0\}\Big) \text{ le couple}\\ \text{de fonction de température et de multiplicateur de L}\text{AGRANGE } \big(T_{ex}, \lambda_{ex}\big)\\ \text{qui minimise l'énergie potentielle } \widetilde{J}_1(T,\lambda) = J_1(T) + \lambda(0)\,[T(0) - T_o]\ ;\end{array}\right.$$

1. *Conditions nécessaires de minimisation et premières variations des énergies.*
   Explicitez les conditions nécessaires de minimisation de J_1 et $\widetilde{J}_1$, et en particulier celles qui se découlent de leur condition de stationnarité respective :

   $$i)\ \delta_\phi J_1(T_{ex}) \overset{déf}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{J_1(T_{ex} + \varepsilon\phi) - J_1(T_{ex})}{\varepsilon} = 0\ ,\ \forall \phi \in V_1^0 = \Big\{\phi \in \mathcal{H}^1\Big([0,L]\Big) \text{ t.q. } \phi(0) = 0\Big\}$$

   $$ii)\ \delta_{\{\phi,\widetilde{\phi}\}} \widetilde{J}_1(T_{ex}, \lambda_{ex}) \overset{déf}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\widetilde{J}_1(T_{ex} + \varepsilon\phi, \lambda_{ex} + \varepsilon\widetilde{\phi}) - \widetilde{J}_1(T_{ex}, \lambda_{ex})}{\varepsilon} = 0\ ,\ \forall (\phi, \widetilde{\phi}) \in \widetilde{V}_1$$

2. *Approximations.*
   Nous allons rechercher des approximations de T_{ex} et (T_{ex}, λ_{ex}) en substituant, respectivement dans $\mathcal{P}_1$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_1$, les espaces (*infinies*) V_1 et $\widetilde{V}_1$ par les sous-espaces (*finies*) qui suivent :

   $$\begin{aligned} V_m &= \left\{T_m \in \mathcal{C}^1\Big([0,L]\Big) \text{ t.q. } \left\{\begin{array}{l} \exists \vec{\tau} = \big[\tau_i\big]_{i=0,\dots,m} \in \mathbb{R}^{m+1} \\ \text{t.q. } T_m(x) = \vec{N}^{\,t}(x)\,\vec{\tau} \end{array}\right.\ ,\ \text{et } T_m(0) = T_o\right\}\ ,\\ \widetilde{V}_m &= \left\{(T_m, \lambda_m) \in \mathcal{C}^1\Big([0,L]\Big) \times \mathcal{C}^o\Big(\{0\}\Big) \text{ t.q. } \left\{\begin{array}{l} \exists \vec{\tau} = \big[\tau_i\big]_{i=0,\dots,m} \in \mathbb{R}^{m+1} \\ \text{t.q. } T_m(x) = \vec{N}^{\,t}(x)\,\vec{\tau} \end{array}\right.\right\}\ ;\end{aligned}$$

   $\vec{N} = \big[N_i\big]_{i=0,\dots,m} \in \Big[\mathcal{C}^1\Big([0,L]\Big)\Big]^{m+1}$ étant composé de $m+1$ fonctions linéairement indépendantes dans $\mathcal{C}^1\Big([0,L]\Big)$ et qui donnent $\vec{N}(0) = \big[\delta_{ip}\big]_{i=0,\dots,m}$, avec $p \in \{0,\dots,m\}$ fixé.

   (a) Reformulez les énergies $J_1(T_m)$ et $\widetilde{J}_1(T_m, \lambda_m)$ en fonction des variables $\vec{\tau}$ et λ_m , et de

   $$\begin{aligned} K &= \int_0^L k\,\frac{d\vec{N}}{dx}(x)\frac{d\vec{N}^{\,t}}{dx}(x)\,dx\ = K^t\ \in \mathcal{M}_{m+1}\quad ,\\ \vec{F} &= \int_0^L \big[c_o - c_1 x\big]\vec{N}(x)\,dx\ +\ h\,\vec{N}(L)\ \in \mathbb{R}^{m+1}\quad .\end{aligned}$$

   (b) Explicitez les nouvelles conditions nécessaires de minimisation de J_1 , sachant que sa condition de stationnarité 1.i) est maintenant telle que :

   $$\delta_{\phi_m} J_1(T_m) = 0\ ,\ \forall \phi_m \in V_m^o = \left\{\phi_m \in \mathcal{C}^1\Big([0,L]\Big) \text{ t.q. } \left\{\begin{array}{l} \exists \vec{\varphi} = \big[\varphi_i\big]_{i=0,\dots,m} \in \mathbb{R}^{m+1} \\ \text{t.q. } \phi_m(x) = \vec{N}^{\,t}(x)\,\vec{\varphi} \end{array}\right.\ ,\ \text{et } \phi_m(0) = 0\right\}.$$

(c) Vérifiez que ces conditions nécessaires sont équivalentes aux équations ci-dessous :

$$i)\ K'\vec{\tau} = \vec{F}', \text{ avec } \left\{ \begin{array}{rcl} K' & = & \Big[Id - \vec{N}(0)\vec{N}^t(0)\Big]K + \vec{N}(0)\vec{N}^t(0)\ ,\ Id = \big[\delta_{ij}\big]_{i,j=0,\ldots,m} \\ \vec{F}' & = & \Big[Id - \vec{N}(0)\vec{N}^t(0)\Big]\vec{F} + T_o\vec{N}(0) \end{array} \right.$$

$$ii)\ K''\vec{\tau} = \vec{F}'', \text{ avec } \left\{ \begin{array}{rcl} K'' & = & K''^{\,t} \ = \ \Big[Id - \vec{N}(0)\vec{N}^t(0)\Big]K\Big[Id - \vec{N}(0)\vec{N}^t(0)\Big] + \vec{N}(0)\vec{N}^t(0) \\ \vec{F}'' & = & \Big[Id - \vec{N}(0)\vec{N}^t(0)\Big]\Big[\vec{F} - T_oK\vec{N}(0)\Big] + T_o\vec{N}(0) \end{array} \right.$$

$$iii)\ \left\{ \begin{array}{rcl} \tau_p & = & T_o \\ \check{K}\vec{\check{\tau}} & = & \vec{\check{F}} \end{array} \right. \ , \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \check{K} = \check{K}^t = \big[K_{ij}\big]_{\substack{i,j=0,\ldots,m \\ i,j\neq p}} \ ,\ \vec{\check{\tau}} = \big[\tau_i\big]_{\substack{i=0,\ldots,m \\ i\neq p}} \\ \vec{\check{F}} = \big[F_i - T_oK_{pi}\big]_{\substack{i=0,\ldots,m \\ i\neq p}} \end{array} \right.$$

(d) Explicitez les nouvelles conditions nécessaires de minimisation de $\widetilde{J}_1$, sachant que sa condition de stationnarité 1.ii) est maintenant telle que :

$$\delta_{(\phi_m\,,\,\widetilde{\varphi})}\widetilde{J}_1(T_m, \lambda_m) = 0\ ,\ \forall\,(\phi_m = \vec{N}^{\,t}\,\vec{\varphi}, \widetilde{\varphi}) \in \widetilde{V}_m\ .$$

Vérifiez alors que l'on a comme condition nécessaire : $\lambda_{m\,(0)} = \vec{N}^{\,t}(0)\big[\vec{F} - K\vec{\tau}\big]$.

3. *Applications numériques*.

(a) Appliquez la méthode i) du 2c) pour déterminer $T_1 = N_0(x)\,\tau_0 + N_1(x)\,\tau_1$ quand $\vec{N}(x) = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{bmatrix}$, en sachant $K = \dfrac{k}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{2} - \dfrac{c_1L^2}{6} \\ \dfrac{c_oL}{2} - \dfrac{c_1L^2}{3} + h \end{bmatrix}$.

(b) Appliquez la méthode iii) du 2c) pour déterminer $T_2 = N_0(x)\,\tau_0 + N_1(x)\,\tau_1 + N_2(x)\,\tau_2$ quand $\vec{N}(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - \dfrac{2x}{L}\right)\left(1 - \dfrac{x}{L}\right) \\ \dfrac{4x}{L}\left(1 - \dfrac{x}{L}\right) \\ \dfrac{x}{L}\left(\dfrac{2x}{L} - 1\right) \end{bmatrix}$, en sachant

$$K = \frac{k}{3L}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{6} \\ \dfrac{2c_oL}{3} - \dfrac{c_1L^2}{3} \\ \dfrac{c_oL}{6} - \dfrac{c_1L^2}{6} + h \end{bmatrix}.$$

(c) Comparez ensuite les valeurs des multiplicateurs de LAGRANGE (discrets) $\lambda_{m\,(0)}$ et du flux $k\dfrac{dT_m}{dx}{\scriptstyle(0)}$ (où $m = 1, 2$) avec celle de $\lambda_{ex\,(0)} = k\dfrac{dT_{ex}}{dx}{\scriptstyle(0)}$.

Problème 2 : Plaque élastique chargée perpendiculairement à son plan moyen de repos.

Reconsidérons le problème de la plaque triangulaire en flexion du TD n^{o}1 avec la formulation énergétique suivante :

$$(\mathcal{P}'_1)\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver la fonction de déplacement } u_{ex} \in V_1 = \left\{u \in \mathcal{H}^1\left(\bar{\Omega}\right) \text{ t.q. } u(x) = U,\ \forall x \in \Gamma_1\right\} \\ \text{qui minimise l'énergie potentielle} \\ J_1(u) \quad = \quad \displaystyle\int_\Omega \left\{\frac{\mu}{2}\left[\vec{\nabla} u(x)\right] \bullet \left[\vec{\nabla} u(x)\right] - \frac{c}{L}\left(1 - \frac{x_1}{L}\right) u(x)\right\} d\Omega + \int_{\Gamma\setminus\Gamma_1} \frac{c\, x_2^2}{2L\ell(x)}\, u(x)\, d\Gamma \end{array}\right.$$

1. *Approximation du déplacement vertical*
   Appliquez la méthode de Ritz pour déterminer l'approximation (affine sur $\bar{\Omega}$)

$$u_3 = \sum_{i=1}^{3} N_i(x)\, \tau_i = \vec{N}^{\,t}(x)\, \vec{\tau} \quad ,$$

   qui est définie avec le vecteur de fonctions d'interpolation nodale de Lagrange suivant

$$\vec{N}(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x_1}{L} - \dfrac{x_2}{L} \\ \dfrac{x_1}{L} \\ \dfrac{x_2}{L} \end{bmatrix} .$$

2. *Approximations des forces de réaction sur Γ_1*
   Dans le cas d'une analyse continue, les *valeurs locales des forces de réaction* sur Γ_1 peuvent-être obtenues en minimisant l'énergie

$$J_2(u, \lambda) = J_1(u) + \int_{\Gamma_1} \frac{\lambda(x)}{L}\,[u(x) - U]\, d\Gamma \ , \text{ avec } u \in \mathcal{H}^1\left(\bar{\Omega}\right) \text{ et } \lambda \in \mathcal{L}^2\left(\Gamma_1\right) .$$

   Ces valeurs correspondent alors à celles du multiplicateur de Lagrange

$$\lambda_{ex}(x) = \mu\, L \left(\frac{\partial\, u_{ex}}{\partial n}\right)_{/\Gamma_1}(x) \ , \ \underline{\underline{\forall\, x_1 \in]0, L[}} \ ,$$

   et peuvent-être estimées numériquement aux points nodaux $A_i \in \Gamma_1$ (*i.e.* où $N_j(A_i) = \delta_{ij}$), en recherchant le couple de fonction de déplacement u_3 et de multiplicateur de Lagrange (d'approximation) λ_3 qui minimise l'énergie

$$J_2(u_3, \lambda_3) = J_1(u_3) + \sum_{\{A_i\}\subset\Gamma_1} \lambda_{3(A_i)}\,[u_{3(A_i)} - U] \quad , \text{ avec } \vec{\tau} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \lambda_3 \in \mathcal{C}^o\Big(\{A_i \in \Gamma_1\}\Big) .$$

   (a) Utilisez la méthode vue au problème de la chaleur pour obtenir les valeurs du multiplicateur de Lagrange $\lambda_3(x)$ aux points nodaux $x = (0^+, 0)$ et $x = (L^-, 0)$.

   (b) Comparez ces valeurs avec celles des flux $\mu\, L \left(\dfrac{\partial\, u_3}{\partial n}\right)_{/\Gamma_1}(x)$ et $\mu\, L \left(\dfrac{\partial\, u_{ex}}{\partial n}\right)_{/\Gamma_1}(x)$, pour $x_1 \in \{0^+, L^-\}$.

TD3: Eléments Finis

Problème 1: Conduction de chaleur dans une barre.

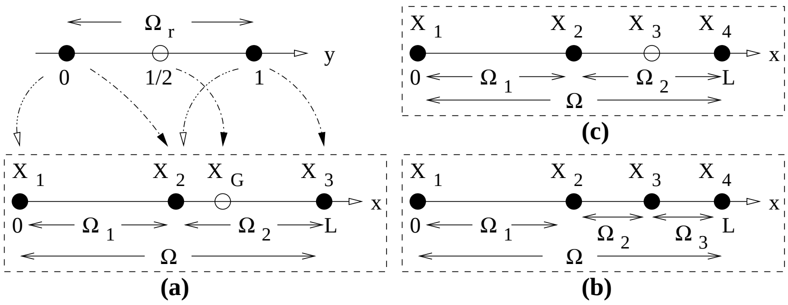


Figure 3: *Les p éléments finis $\bar{\Omega}_e$, et les $n+1$ noeuds $\{X_{n_g}\}$ des fonctions d'interpolation $\{N_{n_g}\}$.*

Nous allons maintenant traiter le problème de minimisation thermique $\mathcal{P}_1$ (et $\mathcal{P}_2$) du T.D. n^{o}2 par la méthode des ÉLÉMENTS FINIS,

1$^{\mathbf{o}}$− en partitionnant (*i.e.* maillant) convenablement le domaine $\bar{\Omega} = [0, L]$ en un nombre p d'éléments finis

$$\Omega_e =]X_{n_g(e,0)}\ ,\ X_{n_g(e,m_e)}[\neq \emptyset \quad \text{avec} \quad e = 1, \ldots, p \qquad \Big(\, \bar{\Omega} \approx \bigcup_{e=1}^{p} \bar{\Omega}_e\ ,\ \text{et } \Omega_e \cap \Omega_{e'} = \emptyset,\ \text{si } e \neq e'\, \Big)\ ;$$

2$^{\mathbf{o}}$− et en recherchant alors une (ou la) fonction d'approximation T_n qui minimise l'énergie potentielle

$$J_1(T) = \int_\Omega \frac{k}{2} \left[\frac{dT}{dx}(x)\right]^2 dx - \int_\Omega \big[c_o - c_1\, x\big]\, T(x)\, dx - h\, T(L)$$

dans un certain espace de fonctions d'interpolation nodale (à $n+1$ noeuds),

$$V_n = \left\{ T \in \mathcal{H}^1\Big(\bigcup_{e=1}^{p} \bar{\Omega}_e \Big) \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} \exists \vec{\tau}_e = [\tau_{n_g(e,n_l)}]_{n_l=0,\ldots,m_e} \in \mathbb{R}^{m_e+1} \\ \text{t.q. } T_{/\,\bar{\Omega}_e}(x) = \vec{N}_e^{\,t}(x)\, \vec{\tau}_e \end{array} \right. \quad,\quad \text{et } T(0) = T_o \right\}.$$

Chacun des p vecteurs $\vec{N}_e = \big[N_{n_g(e,n_l)}\big]_{n_l=0,\ldots,m_e}$ est notamment composé de $m_e + 1$ fonctions d'interpolation nodale, $N_{n_g(e,n_l)}$, qui sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{H}^1(\bigcup_{e=1}^{p} \bar{\Omega}_e)$ et à support dans $\bar{\Omega}_e$ (*i.e.* non-identiquement nulles sur $\bar{\Omega}_e$ seulement).

Les abscisses $\{X_{n_g} \equiv X_{n_g(e,n_l)}\} \in \bigcup_{e=1}^{p} \bar{\Omega}_e$ des $n+1$ noeuds des fonctions d'interpolation de V_n seront précisées ci-après dans *une table de coordonées nodales*. Ces noeuds sont à la fois numérotés par rapport à $\bigcup_{e=1}^{p} \bar{\Omega}_e$ avec les valeurs globales $n_g \in \{1, \ldots, n+1\}$, et par rapport à l'élément $\bar{\Omega}_e \ni X_{n_g(e,n_l)}$ avec les valeurs locales $n_l \in \{0, \ldots, m_e\}$; ces 2 numérotations sont liées par une fonction numérique surjective, $(e, n_l) \mapsto n_g(e, n_l) = n_g$, que l'on exprimera via une *table de connectivité* telle que :

$\lfloor \mathbf{n_l}$ $\mathbf{e} \rceil$	0	$\cdots$	$m = \max\limits_{1 \le e \le p} \{m_e\}$
1	valeur de $n_g(1,0)$	$\cdots$	valeur de $n_g(1,m)$ ou rien si $m > m_e$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
p	valeur de $n_g(p,0)$	$\cdots$	valeur de $n_g(p,m)$ ou rien si $m > m_e$

Cette table est notamment utile pour former le vecteur global $\vec{\tau} = \left[\tau_{n_g}\right]_{n_g=1,\ldots,n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, en "*assemblant*" les composantes des p vecteurs de paramètres nodaux élémentaires, $\{\vec{\tau}_e\}_{e=1,\ldots,p}$.

1. Exprimez l'énergie $J_1(T_n)$ en fonction des p triplets élémentaires $(K_e, \vec{F}_e, \vec{\tau}_e)$, sachant que

$$\begin{aligned} K_e &= \int_{\Omega_e} k \, \frac{d\vec{N}_e}{dx}(x) \frac{d\vec{N}_e}{dx}^t(x)\, dx \;=\; K_e^t \quad , \\ \vec{F}_e &= \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_e} \left[c_o - c_1 x\right] \vec{N}_e(x)\, dx \;+\; h\, \vec{N}_e(L) & , \quad \text{si } L \in \bar{\Omega}_e \\ \displaystyle\int_{\Omega_e} \left[c_o - c_1 x\right] \vec{N}_e(x)\, dx & , \quad \text{si } L \notin \bar{\Omega}_e \end{cases} \end{aligned} .$$

2. <u>*Approximation avec* $p = 2$ (*éléments*) et $n+1 = 3$ (*noeuds d'interpolation*) (**Figure 3a**).</u>
Nous maillons $\bar{\Omega}$ avec deux éléments, $\bar{\Omega}_1 = [X_1, X_2]$ et $\bar{\Omega}_2 = [X_2, X_3]$, qui sont définis avec la *table de coordonnées nodales* suivante :

Noeud $\mathbf{X_{n_g}}$	X_1	X_2	X_3
Valeur x =	0	$L/2$	L

Les deux vecteurs $\left\{\vec{N}_e\right\}_{e=1,2}$ sont formés des mêmes fonctions d'interpolation de Lagrange,

$$\vec{N}_e\big(x(y)\big) = \vec{\tilde{N}}_1(y) \overset{d\acute{e}f}{=} \begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix} \quad , \ \forall y \in \bar{\Omega}_r = [0,1] \quad (\text{ et pour } e = 1,2) \ ,$$

quand on utilise les *transformations géométriques isoparamétriques* (et <u>*affines*</u>) suivantes

$$\begin{cases} \bar{\Omega}_r & \xrightarrow{\ x\ } \quad \bar{\Omega}_e = \left[X_{n_g(e,0)}, X_{n_g(e,m_e)}\right] \\ y & \longmapsto \quad x(y) = (1-y)\, X_{n_g(e,0)} + y\, X_{n_g(e,m_e)} = \vec{\tilde{N}}_1^{\,t}(y)\, \vec{\tilde{X}}_e \ , \ \text{avec } \vec{\tilde{X}}_e = \begin{bmatrix} X_{n_g(e,0)} \\ X_{n_g(e,m_e)} \end{bmatrix} \end{cases}$$

entre les éléments $\left\{\bar{\Omega}_e\right\}_{e=1,2}$ et un élément $\bar{\Omega}_r$ qui est dit de *référence*.

(a) Calculez chaque couple $\big(K_e, \vec{F}_e\big)$, en effectuant tous les calculs sur $\bar{\Omega}_r$.

(b) Explicitez le tableau de connectivité, puis établissez la matrice $K = \left[K_{n_g\, n'_g}\right]_{n_g, n'_g = 1, n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}$ et le vecteur $\vec{F} = \left[F_{n_g}\right]_{n_g=1,n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ qui sont associés à $\vec{\tau}$ dans $J_1(T_n) = \vec{\tau}^{\,t} \left[\frac{1}{2}\, K\, \vec{\tau} - \vec{F}\right]$.

(c) Déterminez $\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$, puis déduisez-en l'approximation T_2 recherchée ainsi qu'une estimation de la valeur du flux de température $k \dfrac{d\,T_{ex}}{dx}(0)$ avec un multiplicateur de Lagrange $\lambda_2(0)$.

(**Exercices supplémentaires: raffinements de l'approximation.**)

3. *Effets d'une transformation géométrique nonlinéaire* (**Figure 3a**) sur $\bar{\Omega}_2$.
L'élément $\Omega_2 =]X_2, X_3[$ est redéfini selon $\Omega_2 = \big]X_2\,,\,X_G\big] \cup \big[X_G\,,\,X_3\big[$, avec un $3^{ème}$ noeud géométrique supplémentaire $X_G \in [X_2, X_3]$. Toutefois, nous recherchons encore une approximation T_2 qui reste définie avec $\vec{N}_2\big(x(y)\big) = \vec{\vec{N}}_1(y)\,,\ \forall x \in \bar{\Omega}_2$, mais avec

$$\begin{cases} \bar{\Omega}_r & \xrightarrow{x} & \bar{\Omega}_2 = \big[X_2, X_G\big] \cup \big[X_G, X_3\big] \\ y & \longmapsto & x(y) = \vec{\vec{N}}_2^{\,t}(y)\ \vec{\vec{X}}_2 \quad , \text{ avec } \vec{\vec{X}}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_G \\ X_3 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{\vec{N}}_2(y) \overset{déf}{=} \begin{bmatrix} (1-2y)(1-y) \\ 4y\,(1-y) \\ y\,(2y-1) \end{bmatrix} \end{cases}$$

(a) Quelles conditions doit satisfaire le noeud X_G pour que cette transformation géométrique soit réellement quadratique (et alors *super-paramétrique*), et régulière (*i.e.* bijective et avec $\dfrac{dx}{dy}(y) \neq 0\,,\forall y \in \bar{\Omega}_r$) ?

(b) Peut-on calculer alors, *de façons exacte*, les intégrales qui constituent K_2 et F_2 en utilisant des quadratures (d'interpolation polynômiale) définies sur $\bar{\Omega}_r$? et sur $\bar{\Omega}_2$?

(c) Déterminez l'expression exacte de l'approximation T_2 quand $X_G = \dfrac{2L}{3}$, ainsi que la nouvelle valeur du multiplicateur de LAGRANGE $\lambda_2(0)$.

4. *Approximation avec* $p = 3$ et $n + 1 = 4$ (**Figure 3b**).
Reprenez l'étude **2.** en remplaçant son élément $\bar{\Omega}_2$ par deux éléments qui sont $\bar{\Omega}_2 = [X_2, X_3]$ et $\bar{\Omega}_3 = [X_3, X_4]$, et que nous délimitons avec :

Noeud $\mathbf{X_{n_g}}$	X_1	X_2	X_3	X_4
valeur x =	0	$L/2$	$3L/4$	L

Nous voulons obtenir alors une approximation T_3 qui soit, comme en **2.**, définie iso-paramétriquement pour $e = 1, 2, 3$.

5. *Approximation avec* $p = 2$ et $n + 1 = 4$ (**Figure 3c**).
Reprenez l'étude **4.** en remplaçant ses deux éléments $\bar{\Omega}_2$ et $\bar{\Omega}_3$ par un seul élément $\bar{\Omega}_2 = [X_2, X_3] \cup [X_3, X_4]$. Cependant, pour continuer à avoir la meilleur valeur d'approximation possible en X_3, nous recherchons une fonction T_3 qui soit définie *sub-paramétriquement* sur le nouvel élément $\bar{\Omega}_2$, avec :

$$\vec{N}_2\big(x(y)\big) = \underline{\underline{\vec{\vec{N}}_2(y)}} \quad , \text{ quand } x(y) = \underline{\underline{\vec{\vec{N}}_1^{\,t}(y)}}\ \vec{\vec{X}}_e \in \bar{\Omega}_e\ ,\ \vec{\vec{X}}_e = \begin{bmatrix} X_{n_g(e,0)} \\ X_{n_g(e,m_e)} \end{bmatrix}\ , \text{ et } e = 1, 2\,.$$

6. Comparez les valeurs de T_{ex} et des approximations T_n des parties **2.**, **3.**, **4.**, et **5.** en $x \in \{0^+, (L/2)^\pm, (2L/3)^\pm, (3L/4)^\pm, L^-\}$; faites de même avec les flux $k\dfrac{T_{ex}}{dx}$ et $k\dfrac{T_n}{dx}$.

Problème 2 : Plaque élastique chargée perpendiculairement à son plan moyen de repos.

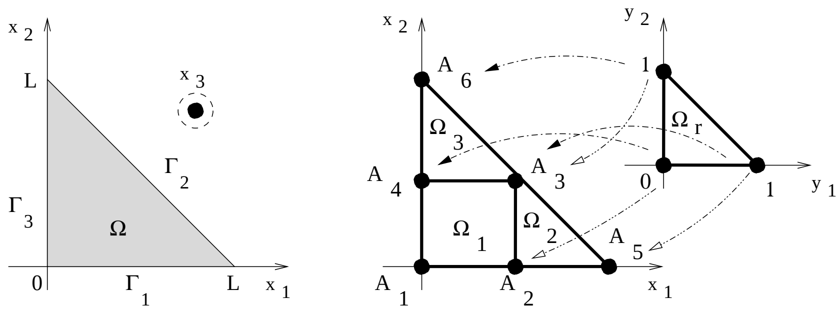


Figure 4: *Le partitionnement en* 3 *éléments finis et les* 6 *noeuds d'interpolation* $\{A_{n_g}\}_{n_g=1,\dots,6}$ *. Les éléments triangulaires* $\{\bar{\Omega}_e\}_{e=2,3}$ *de ce maillage se réfèrent à un élément* $\bar{\Omega}_r$ *qui a* 2 *côtés unitaires.*

On applique la méthode des éléments finis au problème $(\mathcal{P}_1')$ du **TD2**. Le domaine de repos $\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \in [0\,, L] \times [0, 1 - x_1]\}$ est partitionné en 3 éléments, $\{\Omega_e\}_{e=1,2,3}$ (*cf* **Figure 4**) . Les coordonnées $(X_{1\,n_g}, X_{2\,n_g}, X_{3\,n_g})$ des sommets $A_{n_g(e,n_l)}$ de l'élément rectangulaire Ω_1 (avec $e = 1$ et $0 \le n_l \le m_e = 3$) et des éléments triangulaires Ω_2 (avec $e = 2$ et $0 \le n_l \le m_e = 2$) et Ω_3 (avec $e = 3$ et $0 \le n_l \le m_e = 2$) sont notamment spécifiées dans la *table des coordonnées* qui suit :

Noeud $\mathbf{A_{n_g}}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$\mathbf{x_1} : \mathbf{X_{1\,n_g}} =$	0	$L/2$	$L/2$	0	L	0
$\mathbf{x_2} : \mathbf{X_{2\,n_g}} =$	0	0	$L/2$	$L/2$	0	L
$\mathbf{x_3} : \mathbf{X_{3\,n_g}} =$	0	0	0	0	0	0

et leurs numérotations globale et locale dans la table de connectivité suivante :

$\lfloor \mathbf{n_l}$ $\mathbf{e}\rceil$	0	1	2	3
1	$n_g(1,0) = 1$	$n_g(1,1) = 2$	$n_g(1,2) = 3$	$n_g(1,3) = 4$
2	$n_g(2,0) = 2$	$n_g(2,1) = 5$	$n_g(2,2) = 3$	
3	$n_g(3,0) = 4$	$n_g(3,1) = 3$	$n_g(3,2) = 6$	

Nous voulons déterminer alors l'approximation u_5 qui minimise l'énergie potentielle

$$J_1(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{\mu}{2} \left[\vec{\nabla} u(x)\right] \bullet \left[\vec{\nabla} u(x)\right] - \frac{c}{L} \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) u(x) \right\} d\Omega + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \frac{c\, x_2^2}{2L\ell(x)}\, u(x)\, d\Gamma$$

dans un espace de fonctions d'interpolation nodale (à 6 noeuds dans $\overset{p}{\underset{e=1}{\cup}} \bar{\Omega}_e$) qui est

$$V_5 = \left\{ u \in \mathcal{H}^1 \Big(\overset{p}{\underset{e=1}{\cup}} \bar{\Omega}_e \Big) \; ; \; u_{/\,\bar{\Omega}_e}(x) = \sum_{n_l=0}^{m_e} N_{n_g(e,n_l)}(x)\, \tau_{n_g(e,n_l)} = \vec{N}_e^{\,t}(x)\, \vec{\tau}_e \;, \;\; \text{et } u_{/\,\Gamma_1}(x) = U \right\} .$$

Les vecteurs $\vec{N}_e = \left[N_{n_g(e,n_l)}\right]_{n_l=0,\dots,m_e} \in \left[\mathcal{H}^1(\bar{\Omega}_e)\right]^{m_e+1}$ générateurs de cet espace d'approximation sont constitués de fonctions d'interpolation nodale de Lagrange qui sont :

1°- bi-affines sur $\bar{\Omega}_1$:

$$\vec{N}_1(x) = \begin{bmatrix} N_{n_g(1,0)} \\ N_{n_g(1,1)} \\ N_{n_g(1,2)} \\ N_{n_g(1,3)} \end{bmatrix} (x) = \begin{bmatrix} \left(1-\dfrac{x_1}{L_1}\right)\left(1-\dfrac{x_2}{L_2}\right) \\ \dfrac{x_1}{L_1}\left(1-\dfrac{x_2}{L_2}\right) \\ \dfrac{x_1\,x_2}{L_1\,L_2} \\ \left(1-\dfrac{x_1}{L_1}\right)\dfrac{x_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_1 \ , \\ L_1 = X_{1\,2} - X_{1\,1} \\ \text{ et } L_2 = X_{2\,2} - X_{2\,1} \end{array} \right. \quad ;$$

2°- affines sur un élément de référence triangulaire $\bar{\Omega}_r = \big\{ y = (y_1, y_2) \in [0,1] \times [0, 1-y_1] \big\}$:

$$\vec{N}_e(x(y)) = \begin{bmatrix} N_{n_g(e,0)} \\ N_{n_g(e,1)} \\ N_{n_g(e,2)} \end{bmatrix} \big(x(y)\big) = \vec{\tilde{N}}(y) = \begin{bmatrix} 1 - y_1 - y_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} y \in \bar{\Omega}_r \\ x(y) \in \bar{\Omega}_e \quad \text{pour } \underline{\underline{e = 2, 3}} \end{array} \right.$$

avec les tranformations isoparamétriques (et affines) qui suivent :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \bar{\Omega}_r & \rightarrow & \bar{\Omega}_e \times \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \big[x_i(y)\big]_{i=1,2,3} = \Big[\vec{\tilde{N}}^{\,t}(y)\,\vec{X}_{ie}\Big]_{i=1,2,3} \end{array} \right. \quad , \quad \text{avec} \quad \vec{X}_{ie} = \begin{bmatrix} X_{i n_g(e,0)} \\ X_{i n_g(e,1)} \\ X_{i n_g(e,2)} \end{bmatrix} \ \text{pour} \left\{ \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ e = 2,3 \end{array} \right. \quad .$$

1. Exprimez $J_1(u_5)$ en fonction des 3 triplets élémentaires $(\vec{\tau}_e\,, \vec{F}_e\,, K_e)$, sachant que

$$\begin{aligned} K_e &= \int_{\Omega_e} \mu\, \big[\vec{\nabla}\vec{N}_e^{\,t}(x)\big]^t\, \big[\vec{\nabla}\vec{N}_e^{\,t}(x)\big]\, d\Omega \\ \vec{F}_e &= \int_{\Omega_e} \frac{c}{L}\left(1 - \frac{x_1}{L}\right)\, \vec{N}_e(x)\, d\Omega - \int_{\left(\Gamma\setminus\Gamma_1\right)\cap\bar{\Omega}_e} \frac{c\,x_2^2}{2L\ell(x)}\, \vec{N}_e(x)\, d\Gamma \end{aligned}$$

2. Calculez chaque couple $\big(K_e, \vec{F}_e\big)$, en effectuant cependant les calculs à partir du triangle de référence $\bar{\Omega}_r$ si $e = 2$ et 3 (voir les indications d'analyse et d'intégration données ci-après).

3. Donnez les expressions de la matrice $K = \big[K_{n_g\,n'_g}\big]_{n_g, n'_g = 1,\ldots,6} \in \mathcal{M}_6$ et du vecteur $\vec{F} = \big[F_{n_g}\big]_{n_g=1,\ldots,6} \in \mathbb{R}^6$ qui sont associés au vecteur des paramètres nodaux $\vec{\tau} = \big[\tau_{n_g}\big]_{n_g=1,\ldots,6} \in \mathbb{R}^6$ dans $J_1(u_5) = \vec{\tau}^{\,t}\left[\dfrac{1}{2}\,K\,\vec{\tau} - \vec{F}\right]$.

4. Déterminez ce vecteur $\vec{\tau}$, puis comparez les valeurs de u_5 et u_{ex} aux 6 noeuds A_i du maillage et au barycentre $x = (L/3, L/3)$ du triangle $\bar{\Omega}$.

5. Estimez la valeur des forces de réaction (*i.e.* les valeurs limites de $\mu\, L \left(\dfrac{\partial\, u_{ex}}{\partial n}\right)_{/\Gamma_1}(x)$) aux noeuds $x \in \{A_1, A_2\, A_5\}$ avec des multiplicateurs de LAGRANGE d'approximation $\big\{\lambda_5(A_i)\big\}_{i=1,2,5}$; puis avec les valeurs limites des flux $\mu\, L \left(\dfrac{\partial\, u_5}{\partial n}\right)_{/\Gamma_1}(x)$.

$\star$ *Indications et formulaires d'intégration :*

- L'emploi de transformations géométriques (*planes*) implique ceux du vecteur gradient (2D) $\vec{\vec{\nabla}} = \left[\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right]_{i=1,2}$ et des matrices jacobiennes (2D) $\left[\dfrac{\partial x}{\partial y}\right] = \left[\dfrac{\partial x_j}{\partial y_i}(y)\right]_{i,j=1,2} = \vec{\vec{\nabla}}\left[x_j\right]^t_{j=1,2}$ (qui sont *inversibles* si les transformations sont *régulières*) dans :

1°)- le vecteur gradient sur $\bar{\Omega}$ (et $\bar{\Omega}_e$), car

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \overset{3D}{=} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]_{i=1,2,3} &= \left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(y)\right]_{\substack{i=1,2,3\\ j=1,2}} \left[\frac{\partial}{\partial y_j}\right]_{j=1,2} \\ \overset{2D}{\sim} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]_{i=1,2} &= \left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(y)\right]_{i,j=1,2} \left[\frac{\partial}{\partial y_j}\right]_{j=1,2} = \left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]^{-1} \vec{\vec{\nabla}}\end{aligned}$$

2°)- la mesure surfacique $d\Omega = \Bigg\| \underbrace{\vec{d\Omega}(x)}_{\substack{\text{surface plane infinitésimale,}\\ \text{tangente à } \Omega (\text{ou/et à } \Omega_e) \text{ en } x(y)}} \Bigg\| = \sqrt{\vec{d\Omega} \bullet \vec{d\Omega}} > 0$, car

$$\begin{aligned} d\Omega &\overset{3D}{=} \Bigg\| \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\left[x_i\right]_{i=1,2,3} dy_1\right)}_{\text{vecteur tangent à } \Omega} \wedge \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\left[x_i\right]_{i=1,2,3} dy_2\right)}_{\text{vecteur tangent à } \Omega} \Bigg\| = \left\| \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\left[x_i\right]_{i=1,2,3}\right) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\left[x_i\right]_{i=1,2,3}\right) \right\| dy_1\, dy_2 \\ &\overset{2D}{\sim} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\left[x_i\right]_{i=1,2}\right) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\left[x_i\right]_{i=1,2}\right) \right\| dy_1\, dy_2 = \left| \det\left(\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]\right) \right| dy_1\, dy_2 \end{aligned}$$

3°)- la mesure curviligne $d\Gamma = \Bigg\| \underbrace{\vec{d\Gamma}(x)}_{\substack{\text{vecteur infinitésimal, tangent}\\ \text{à } \Gamma (\text{ou/et à } \Gamma_e) \text{ en } x(y)}} \Bigg\| = \sqrt{\vec{d\Gamma} \bullet \vec{d\Gamma}} > 0$, car

$$d\Gamma \overset{3D}{=} \left\| \left(\frac{d}{ds}\left[x_i(s)\right]_{i=1,2,3}\right) \right\| ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2}\, ds \overset{2D}{\sim} \left\| \left(\frac{d}{ds}\left[x_i(s)\right]_{i=1,2}\right) \right\| ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2}\, ds$$

où $s \in [0,1]$ est celui des paramètres y_1 ou y_2 qui permet de décrire la portion de bord $\Gamma \cap \bar{\Omega}_e$ considérée.

- On rappelle que la quadrature (2D) de "Gauss-Legendre d'ordre 3" suivante

$$\int_0^1 \int_0^{1-y_1} f(y)\, dy_2\, dy_1 \approx \frac{1}{6}\left[f\Big(0,\frac{1}{2}\Big) + f\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) + f\Big(\frac{1}{2},0\Big)\right]$$

est exacte si f est un polynôme quadratique par rapport à chacunes des 2 variables y_1 et y_2 sur le triangle de référence. Les pseudo-quadratures (2D) ci-dessous

$$\int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x)\, dx_2\, dx_1 \approx \begin{cases} \dfrac{L_1 L_2}{6}\left[f\Big(\dfrac{L_1}{2},0\Big) + 4f\Big(\dfrac{L_1}{2},\dfrac{L_2}{2}\Big) + f\Big(\dfrac{L_1}{2},L_2\Big)\right] & \text{(cas 1)} \\ \dfrac{L_1 L_2}{6}\left[f\Big(0,\dfrac{L_2}{2}\Big) + 4f\Big(\dfrac{L_1}{2},\dfrac{L_2}{2}\Big) + f\Big(L_1,\dfrac{L_2}{2}\Big)\right] & \text{(cas 2)} \end{cases}$$

résultent des combinaisons des quadratures (1D) de Simpson et du Rectangle; elles sont donc respectivement *exactes* selon que f est un *polynôme affine en* x_1 *et cubique en* x_2 (cas 1), ou inversement, *cubique en* x_1 *et affine en* x_2 (cas 2).

Solutions du TD n^{o}1 : Formulations Intégrales

1. (a) • Cette F.I. *forte* est une forme *simplifiée* de la F.I. forte suivante qui est plus *générale*:

“ *Trouver une (et même la) fonction de température T qui vérifie*
$$0 = \int_0^L \phi(x)\Big[k\frac{d^2T}{dx^2}(x) + c_o - c_1 x\Big]\,dx + \tilde{\phi}(L)\Big[h - k\,\frac{dT}{dx}(L)\Big] + \tilde{\phi}(0)\big[T_o - T(0)\big]$$
pour toute fonction de pondération ϕ suffisamment régulière sur $\Omega =]0, L[$,
et toute autre fonction de pondération $\tilde{\phi}$ définie sur la frontière $\Gamma = \{0, L\}$ ”.

• La forme *faible* de cette F.I. se déduit en effectuant une intégration par parties, et est :

“ *Trouver la fonction de température T qui vérifie*
$$\begin{aligned} 0 \;\; = \;\; & -\int_0^L \Big\{k\,\frac{d\phi}{dx}(x)\,\frac{dT}{dx}(x) + \big[c_o - c_1 x\big]\phi(x)\Big\}\,dx \; + \; h\tilde{\phi}(L) \; + \; k\,\Big[\phi(L) - \tilde{\phi}(L)\Big]\,\frac{dT}{dx}(L) \\ & - k\,\phi(0)\,\frac{dT}{dx}(0) \; + \; \tilde{\phi}(0)\big[T_o - T(0)\big] \end{aligned}$$
pour toute fonction de pondération ϕ suffisamment régulière sur $\bar{\Omega} = [0, L]$,
et toute autre fonction de pondération $\tilde{\phi}$ définie sur la frontière $\Gamma = \{0, L\}$ ”.

(b) Dans le cas simplifié, nous obtenons similairement:

“ *Trouver la fonction de température T qui vérifie*
$$0 = -\int_0^L \Big\{k\,\frac{d\phi}{dx}(x)\,\frac{dT}{dx}(x) + \big[c_o - c_1 x\big]\phi(x)\Big\}\,dx \; + \; h\,\phi(L) \; + \; \phi(0)\,\Big[T_o - T(0) - k\,\frac{dT}{dx}(0)\Big]$$
pour toute fonction de pondération ϕ suffisamment régulière sur $\bar{\Omega}$ ”.

2. *Approximations polynômiales, “thermiquement non-admissibles”.*

(a) La méthode de Galerkin revient à substituer dans ces F.I. le couple $\big(T, \phi\big)$ par celui qui caractérise l'approximation numérique $\Big(T_m = \vec{N}^{\,t}\;\vec{\tau}\;,\;\vec{N}\Big)$. Nous obtenons alors comme équation matricielle $K\vec{\tau} = \vec{F}$, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{m+1} \ni K \;\; & = \;\; -\int_0^L k\,\vec{N}(x)\frac{d^2\vec{N}^t}{dx^2}(x)\,dx \; + \; k\,\vec{N}(L)\,\frac{d\,\vec{N}^t}{dx}(L) \; + \; \vec{N}(0)\vec{N}^t(0) \\ & = -\Big[\int_0^L k\,N_i(x)\frac{d^2N_j}{dx^2}(x)\,dx \; + \; k\,N_i(L)\,\frac{d\,N_j}{dx}(L) \; + \; N_i(0)\,N_j(0)\Big]_{i,j=0,\ldots,m} \end{aligned}$$

en F.I. forte, ou

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{m+1} \ni K \;\; & = \;\; \int_0^L k\frac{d\,\vec{N}}{dx}(x)\frac{d\,\vec{N}^t}{dx}(x)\,dx \; + \; \vec{N}(0)\Big[\vec{N}^t(0) + k\,\frac{d\,\vec{N}^t}{dx}(0)\Big] \\ & = \Big[\int_0^L k\frac{d\,N_i}{dx}(x)\frac{d\,N_j}{dx}(x)\,dx \; + \; N_i(0)\Big[N_j(0) + k\,\frac{d\,N_j}{dx}(0)\Big]\Big]_{i,j=0,\ldots,m} \end{aligned}$$

en F.I. faible, et, pour ces deux cas

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{m+1} \ni \vec{F} \;\; & = \;\; \int_0^L \big[c_o - c_1 x\big]\vec{N}(x)\,dx \; + \; h\,\vec{N}(L) \; + \; T_o\,\vec{N}(0) \\ & = \Big[\int_0^L \big[c_o - c_1 x\big]N_i(x)\,dx \; + \; h\,N_i(L) \; + \; T_o\,N_i(0)\Big]_{i=0,\ldots,m} \end{aligned}$$

(b) Calcul de T_1 par la F.I. faible :

• Commençons tout d'abord par la matrice K. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{N}}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} N_0(x) \\ N_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dN_0}{dx}(x) \\ \dfrac{dN_1}{dx}(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\frac{d\vec{N}}{dx}(x)\frac{d\vec{N}^t}{dx}(x) &= \begin{bmatrix} \dfrac{dN_0}{dx}(x) \\ \dfrac{dN_1}{dx}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{dN_0}{dx}(x) & \dfrac{dN_1}{dx}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dN_0}{dx}(x)\dfrac{dN_0}{dx}(x) & \dfrac{dN_0}{dx}(x)\dfrac{dN_1}{dx}(x) \\ \dfrac{dN_1}{dx}(x)\dfrac{dN_0}{dx}(x) & \dfrac{dN_1}{dx}(x)\dfrac{dN_1}{dx}(x) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

L'intégration de cette matrice *constante* (et symétrique) sur le domaine Ω équivaut à multiplier cette même matrice par la longueur L du segment Ω, de sorte que

$$\int_0^L k\,\frac{d\vec{N}}{dx}(x)\frac{d\vec{N}^t}{dx}(x)\,dx = \frac{k}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Ceci constitue une $1^{ère}$ partie matricielle de K, cette dernière se complètant avec les deux matrices suivantes

$$\begin{aligned}
\vec{N}(0)\vec{N}^t(0) &= \begin{bmatrix} N_0(0) \\ N_1(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_0(0) & N_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0(0)N_0(0) & N_0(0)N_1(0) \\ N_1(0)N_0(0) & N_1(0)N_1(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
k\,\vec{N}(0)\frac{d\vec{N}^t}{dx}(0) &= k\begin{bmatrix} N_0(0) \\ N_1(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{dN_0}{dx}(0) & \dfrac{dN_1}{dx}(0) \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} N_0(0)\dfrac{dN_0}{dx}(0) & N_0(0)\dfrac{dN_1}{dx}(0) \\ N_1(0)\dfrac{dN_0}{dx}(0) & N_1(0)\dfrac{dN_1}{dx}(0) \end{bmatrix} \\
&= \frac{k}{L}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement, il vient par addition $\quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-k}{L} & \dfrac{k}{L} \end{bmatrix}$.

• Concernant $\vec{F}$, la formule d'intégration de Simpson (et celle de Gauss-Legendre à un point d'intégration, pour les polynômes affines) permet de calculer *avec précision*

$$\int_0^L [c_0 - c_1\,x]\,\vec{N}(x)\,dx = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^L [c_0 - c_1\,x]\,N_0(x)\,dx \\ \displaystyle\int_0^L [c_0 - c_1\,x]\,N_1(x)\,dx \end{bmatrix} = \frac{c_0 L}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{c_1 L}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .$$

Nous obtenons alors avec les autres termes $\quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_o L}{2} + T_o - \dfrac{c_1 L^2}{6} \\ \dfrac{c_o L}{2} + h - \dfrac{c_1 L^2}{3} \end{bmatrix}$.

• Puisque $\det\big(K\big) = \dfrac{k}{L} \neq 0$, K peut donc s'inverser pour calculer $\vec{\tau} = K^{-1}\vec{F}$.

Sa matrice inverse est $K^{-1} = \dfrac{\big[\text{Com } K\big]^t}{\det K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{L}{k} \end{bmatrix}$, et par conséquent

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_o L}{2} + T_o - \dfrac{c_1 L^2}{6} \\ \dfrac{c_o L}{2} + T_o - \dfrac{c_1 L^2}{6} + \dfrac{L}{k}\left(\dfrac{c_o L}{2} + h - \dfrac{c_1 L^2}{3}\right) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{(3c_o - c_1 L)L}{6} + T_{ex}(0) \\ \dfrac{(3c_o - c_1 L)L}{6} + T_{ex}(L) \end{bmatrix} .$$

Nous déduisons finalement l'approximation affine recherchée en faisant

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \vec{N}^t(x)\vec{\tau} \\ &= \left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(\frac{c_o L}{2} + T_o - \frac{c_1 L^2}{6}\right) + \frac{x}{L}\left[\frac{c_o L}{2} + T_o - \frac{c_1 L^2}{6} + \frac{L}{k}\left(\frac{c_o L}{2} + h - \frac{c_1 L^2}{3}\right)\right] \\ &= \frac{c_o L}{2} + T_o - \frac{c_1 L^2}{6} + \frac{x}{k}\left(\frac{c_o L}{2} + h - \frac{c_1 L^2}{3}\right) \end{aligned}$$

(c) <u>Calcul de T_2 par la F.I. forte :</u>

• Pour calculer la matrice K, nous avons notamment besoin des résultats suivants

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{N}^t}{dx}(x) &= \begin{bmatrix} \dfrac{dN_0}{dx}(x) & \dfrac{dN_1}{dx}(x) & \dfrac{dN_2}{dx}(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} \dfrac{4x}{L} - 3 & 4 - \dfrac{8x}{L} & \dfrac{4x}{L} - 1 \end{bmatrix} \\ \frac{d^2\vec{N}^t}{dx^2}(x) &= \begin{bmatrix} \dfrac{d^2N_0}{dx^2}(x) & \dfrac{d^2N_1}{dx^2}(x) & \dfrac{d^2N_2}{dx^2}(x) \end{bmatrix} = \frac{4}{L^2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \int_0^L \vec{N}(x)\,dx &= \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^L N_0(x)\,dx \\ \displaystyle\int_0^L N_1(x)\,dx \\ \displaystyle\int_0^L N_2(x)\,dx \end{bmatrix} = \frac{L}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ces derniers calculs d'intégration s'obtiennent, en particulier, avec la quadrature de SIMPSON car chaque composante de $\vec{N}$ est "*quadratique*". Il est alors judicieux de constater que $\dfrac{d^2\vec{N}^t}{dx^2}$ est constant, et que par conséquent

$$\int_0^L -k\,\vec{N}(x)\frac{d^2\vec{N}^t}{dx^2}(x)\,dx = -k\left[\int_0^L \vec{N}(x)\,dx\right]\frac{d^2\vec{N}^t}{dx^2} = \frac{2k}{3L}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} .$$

Les deux autres parties matricielles de K s'obtiennent ensuite en faisant simplement

$$\begin{aligned}
\vec{N}(0)\vec{N}^t(0) &= \begin{bmatrix} N_0(0) \\ N_1(0) \\ N_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(0) & N_1(0) & N_2(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_0(0)N_0(0) & N_0(0)N_1(0) & N_0(0)N_2(0) \\ N_1(0)N_0(0) & N_1(0)N_1(0) & N_1(0)N_2(0) \\ N_2(0)N_0(0) & N_2(0)N_1(0) & N_2(0)N_2(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
k\,\vec{N}(L)\frac{d\,\vec{N}^t}{dx}(L) &= k \begin{bmatrix} N_0(L) \\ N_1(L) \\ N_2(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\,N_0}{dx}(L) & \frac{d\,N_1}{dx}(L) & \frac{d\,N_2}{dx}(L) \end{bmatrix} \\
&= k \begin{bmatrix} N_0(L)\frac{d\,N_0}{dx}(L) & N_0(L)\frac{d\,N_1}{dx}(L) & N_0(L)\frac{d\,N_2}{dx}(L) \\ N_1(L)\frac{d\,N_0}{dx}(L) & N_1(L)\frac{d\,N_1}{dx}(L) & N_1(L)\frac{d\,N_2}{dx}(L) \\ N_2(L)\frac{d\,N_0}{dx}(L) & N_2(L)\frac{d\,N_1}{dx}(L) & N_2(L)\frac{d\,N_2}{dx}(L) \end{bmatrix} \\
&= \frac{k}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{k}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Il résulte alors par sommation $\qquad K = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2k}{3L} & \frac{4k}{3L} & \frac{-2k}{3L} \\ \frac{-8k}{3L} & \frac{16k}{3L} & \frac{-8k}{3L} \\ \frac{k}{3L} & \frac{-8k}{3L} & \frac{7k}{3L} \end{bmatrix}$.

Le déterminant de cette matrice est $\det K = \dfrac{16k^2}{3L^2} \neq 0$ et son inverse est effectivement

$$K^{-1} = \frac{\left[\text{Com } K\right]^t}{\det\left(K\right)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{7L}{16\,k} - \frac{1}{4} & \frac{L}{2\,k} \\ 1 & \frac{L}{2\,k} - \frac{1}{4} & \frac{L}{k} \end{bmatrix} .$$

• La quadrature de Simpson est encore suffisamment précise pour calculer $\vec{F}$ et donne

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_o L}{6} + T_o \\ \dfrac{2c_o L}{3} - \dfrac{c_1 L^2}{3} \\ \dfrac{c_o L}{6} + h - \dfrac{c_1 L^2}{6} \end{bmatrix} .$$

• En effectuant ensuite le produit $\vec{\tau} = K^{-1}\vec{F}$, nous déduisons que

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_o + \dfrac{c_1 L^2}{12} \\ T_o + \dfrac{c_1 L^2}{12} + \dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{3c_o L}{4} + h - \dfrac{11 c_1 L^2}{24}\right) \\ T_o + \dfrac{c_1 L^2}{12} + \dfrac{L}{k}\left(\dfrac{c_o L}{2} + h - \dfrac{c_1 L^2}{3}\right) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{c_1 L^2}{12} + T_{ex}(0) \\ \dfrac{c_1 L^2}{12} + T_{ex}(L/2) \\ \dfrac{c_1 L^2}{12} + T_{ex}(L) \end{bmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \vec{N}^{\,t}(x)\,\vec{\tau} \\ &= \left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(1 - \frac{2x}{L}\right)\left(T_o + \frac{c_1 L^2}{12}\right) \\ &\quad + \frac{4x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)\left[T_o + \frac{c_1 L^2}{12} + \frac{L}{2k}\left(\frac{3c_o L}{4} + h - \frac{11 c_1 L^2}{24}\right)\right] \\ &\quad + \frac{x}{L}\left(\frac{2x}{L} - 1\right)\left[T_o + \frac{c_1 L^2}{12} + \frac{L}{k}\left(\frac{c_o L}{2} + h - \frac{c_1 L^2}{3}\right)\right] \\ &= T_o + \frac{c_1 L^2}{12} \;+\; \frac{x}{k}\left[c_o\left(L - \frac{x}{2}\right) + h + \frac{c_1 L}{4}\left(x - \frac{7L}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

(d) Du point de vue des "*valeurs locales*", ces deux approximations polynômiales sont en fait très mauvaises dès lors que T_{ex} n'appartient pas à l'espace vectoriel qui est généré par les $m+1$ fonctions de forme N_i de T_m. En effet, le polynôme T_1 est très loin d'approximer convenablement la solution exacte T_{ex} dès lors que $c_o \neq 0$ ou $c_1 \neq 0$, et ne satisfait notamment aucune des conditions imposées aux extrémités; ce constat reste également valable pour le polynôme T_2, mais uniquement si $c_1 \neq 0$. Néanmoins, si T_{ex} appartient au contraire à l'espace vectoriel de l'une de ces approximations T_m, alors l'approximation T_m donne le résultat exact. Il est par ailleurs intéressant de noter que les valeurs de T_m et de T_{ex} sont les mêmes aux noeuds d'interpolation, à une valeur de translation près (qui vaut $\dfrac{c_1 L^2}{12}$). On observe en outre que l'augmentation du degré m des polynômes T_m tend à approximer au mieux, et en même temps, les valeurs exactes du champ de température et leurs variations. Nous observons notamment ceci avec les flux

$$\left.\begin{aligned} k\,\frac{dT_{ex}}{dx}(x) &= h + (L - x)\left[c_o - \frac{c_1}{2}\,(x + L)\right] \\ k\,\frac{dT_1}{dx}(x) &= h + L\left(\frac{c_o}{2} - \frac{c_1 L}{3}\right) \\ k\,\frac{dT_2}{dx}(x) &= h - \frac{c_1 L^2}{12} + (L - x)\left[c_o - \frac{c_1 L}{2}\right] \end{aligned}\right. \qquad \forall x \in \bar{\Omega} = [0\,, L]\ .$$

3. *Approximations polynômiales, "thermiquement admissibles"*.

(a) L'application de la méthode de GALERKIN avec le nouveau couple d'approximation numérique $\Big(T_m(x) \;=\; T_o + \vec{\check{N}}^{\,t}(x)\;\vec{\check{\tau}}\;,\;\vec{\check{N}}\Big)$ fournit comme nouvelle équation matricielle $\check{K}\vec{\check{\tau}} = \vec{\check{F}}$, avec

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_m \ni \check{K} \;&=\; -\int_0^L k\,\vec{\check{N}}(x)\frac{d^2\vec{\check{N}}^t}{dx^2}(x)\,dx \;+\; k\,\vec{\check{N}}(L)\;\frac{d\,\vec{\check{N}}^t}{dx}(L) \;+\; \vec{\check{N}}(0)\vec{\check{N}}^t(0)\\ &= \Big[-\int_0^L k\,N_i(x)\frac{d^2N_j}{dx^2}(x)\,dx \;+\; k\,N_i(L)\;\frac{d\,N_j}{dx}(L) \;+\; N_i(0)\,N_j(0)\Big]_{i,j=1,\ldots,m}\end{aligned}$$

en F.I. forte, ou

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_m \ni \check{K} \;&=\; \int_0^L k\frac{d\,\vec{\check{N}}}{dx}(x)\frac{d\,\vec{\check{N}}^t}{dx}(x)\,dx \;+\; \vec{\check{N}}(0)\Big[\vec{\check{N}}^t(0) + k\;\frac{d\,\vec{\check{N}}^t}{dx}(0)\Big]\\ &= \Big[\int_0^L k\frac{d\,N_i}{dx}(x)\frac{d\,N_j}{dx}(x)\,dx \;+\; N_i(0)\Big[N_j(0) + k\;\frac{d\,N_j}{dx}(0)\Big]\Big]_{i,j=1,\ldots,m}\end{aligned}$$

en F.I. faible, et, pour ces cas

$$\mathrm{I\!R}^m \ni \vec{\check{F}} = \int_0^L \big[c_o - c_1 x\big]\,\vec{\check{N}}(x)\,dx + h\,\vec{\check{N}}(L) \;=\; \Big[\int_0^L \big[c_o - c_1 x\big]\,N_i(x)\,dx + h\,N_i(L)\Big]_{i=1,\ldots,m}$$

On peut noter alors qu'il ne sera pas nécessaire de refaire tous les calculs car

$(\check{K}, \vec{\check{\tau}}, \vec{\check{F}})$ se déduit simplement de $(K, \vec{\tau}, \vec{F})$:
1°- *en retranchant à $\vec{F}$ le produit $\vec{N}(0)\,T_o$;*
2°- *puis en supprimant la ligne et la colonne de K, et, la composante de $\vec{F}$, où intervient N_o; et enfin la composante (τ_o) de $\vec{\tau}$ qui était multipliée par la fonction N_o dans l'approximation non-cinématiquement admissible T_m.*

(b) Calcul de T_1 par la F.I. faible :

Si nous appliquons la précédente remarque, nous avons donc qu'une simple équation scalaire à résoudre : $\quad \check{K}\tau_1 = \check{F} \quad , \quad$ avec $\check{K} = \dfrac{k}{L} \quad$ et $\quad \check{F} = \dfrac{c_oL}{2} + h - \dfrac{c_1L^2}{3}$.

Comme l'inversion de cette équation donne $\quad \tau_1 = \dfrac{L}{k}\left(\dfrac{c_oL}{2} + h - \dfrac{c_1L^2}{3}\right) = T_{ex}(L)$,

nous déduisons que l'approximation affine recherchée est finalement telle que :

$$T_1(x) = T_o + N_1(x)\tau_1 = T_o + \frac{x}{k}\left(\frac{c_oL}{2} + h - \frac{c_1L^2}{3}\right) \;.$$

(c) Calcul de T_2 par la F.I. forte :

De même, il vient ici

$$\check{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{16k}{3L} & \dfrac{-8k}{3L} \\ \dfrac{-8k}{3L} & \dfrac{7k}{3L} \end{bmatrix} \quad \text{(avec } \det\big(K\big) = \frac{16k^2}{3L^2} \neq 0\text{)} \quad \text{et} \quad \vec{\check{F}} = \begin{bmatrix} \dfrac{2c_oL}{3} - \dfrac{c_1L^2}{3} \\ \dfrac{c_oL}{6} + h - \dfrac{c_1L^2}{6} \end{bmatrix} \;.$$

On trouve alors très facilement $\check{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{7L}{16\,k} & \dfrac{L}{2\,k} \\ \dfrac{L}{2\,k} & \dfrac{L}{k} \end{bmatrix}$, et puisque

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \check{K}^{-1}\vec{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{3c_oL}{4} + h - \dfrac{11c_1L^2}{24}\right) \\ \dfrac{L}{k}\left(\dfrac{c_oL}{2} + h - \dfrac{c_1L^2}{3}\right) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_{ex}(L/2) \\ \\ T_{ex}(L) \end{bmatrix}$$

nous concluons que l'approximation quadratique recherchée est telle que :

$$\begin{aligned} T_2(x) &= T_o + \vec{N}^{\,t}(x)\,\vec{\tau} \\ &= T_o \; + \; \frac{4x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)\left[\frac{L}{2k}\left(\frac{3c_oL}{4} + h - \frac{11c_1L^2}{24}\right)\right] \\ &\quad + \frac{x}{L}\left(\frac{2x}{L} - 1\right)\left[\frac{L}{k}\left(\frac{c_oL}{2} + h - \frac{c_1L^2}{3}\right)\right] \\ &= T_o \; + \; \frac{x}{k}\left[c_o\left(L - \frac{x}{2}\right) + h + \frac{c_1}{4}\left(x - \frac{7L}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

(d) Ces nouvelles approximations présentent une importante amélioration car, en imposant la condition d'admissiblité "thermique" $T_m(0) = T_o$, elles permettent au moins de retrouver les valeurs exactes du champ de température aux $m + 1$ noeuds d'interpolation. L'approximation polynômiale de plus haut degré (*i.e.* ici T_2) est encore celle qui permet d'approcher le mieux, et simultanément, les valeurs de T_{ex} et les valeurs du flux $k\,\dfrac{T_{ex}}{dx}$, notamment au point $x = L$ où ce flux est imposé.

Problème 2 : Plaque élastique chargée perpendiculairement à son plan moyen de repos.

1. La formule de Green permet d'établir l'équation intégrale faible qui suit :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \phi(x)\Big[\mu\Delta u(x) + \frac{c_2}{L}\Big(1-\frac{x_1}{L}\Big)\Big]\,d\Omega - \int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\phi(x)\Big[\mu\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \frac{c\,x_2^2}{2L\ell(x)}\Big]\,d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma_1}\phi(x)\Big[u(x)-U\Big]\,d\Gamma \\
&= \int_\Omega \Big\{-\mu\,[\vec\nabla\phi(x)]\bullet[\vec\nabla u(x)] + \frac{c}{L}\Big(1-\frac{x_1}{L}\Big)\,\phi(x)\Big\}\,d\Omega \\
&\quad -\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\frac{c\,x_2^2}{2L\ell(x)}\,\phi(x)\,d\Gamma \;-\; \int_{\Gamma_1}\phi(x)\Big[u(x)-\mu\frac{\partial u}{\partial n}(x)-U\Big]\,d\Gamma \\
&= \int_\Omega \Big\{-\mu\,[\vec\nabla\,\phi(x)]^t\,[\vec\nabla u(x)] + \frac{c}{L}\Big(1-\frac{x_1}{L}\Big)\,\phi(x)\Big\}\,d\Omega \\
&\quad -\int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\frac{c\,x_2^2}{2L\ell(x)}\,\phi(x)\,d\Gamma \;-\; \int_{\Gamma_1}\phi(x)\Big[u(x)-\mu\,\vec n^{\,t}(x)\vec\nabla u(x)-U\Big]\,d\Gamma
\end{aligned}$$

2. Si nous remplaçons dans cette dernière équation (u,ϕ) par $(u_3 = \vec N^t\vec\tau, \vec N)$, nous obtenons alors comme équation matricielle $K\vec\tau = \vec F$, avec

$$\begin{aligned}
K &= \int_\Omega \mu\,[\vec\nabla\vec N^{\,t}(x)]^t\,[\vec\nabla\vec N^{\,t}(x)]\,d\Omega \;+\; \int_{\Gamma_1}\vec N(x)\Big\{\vec N^{\,t}(x)-\mu\,\vec n^{\,t}(x)[\vec\nabla\vec N^{\,t}(x)]\Big\}\,d\Gamma \\
&= \Big[\int_\Omega \mu\,[\vec\nabla N_i(x)]^t\,[\vec\nabla N_j(x)]\,d\Omega \;+\; \int_{\Gamma_1}N_i(x)\Big\{N_j(x)-\mu\,\vec n^{\,t}(x)[\vec\nabla N_j(x)]\Big\}\,d\Gamma\Big]_{i,j=1,2,3}\,, \\
\vec F &= \int_\Omega \frac{c}{L}\Big(1-\frac{x_1}{L}\Big)\,\vec N(x)\,d\Omega - \int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\frac{c\,x_2^2}{2L\ell(x)}\,\vec N(x)\,d\Gamma + \int_{\Gamma_1}U\vec N(x)\,d\Gamma \\
&= \Big[\int_\Omega \frac{c}{L}\Big(1-\frac{x_1}{L}\Big)\,N_i(x)\,d\Omega - \int_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\frac{c\,x_2^2}{2L\ell(x)}\,N_i(x)\,d\Gamma + \int_{\Gamma_1}U N_i(x)\,d\Gamma\Big]_{i=1,2,3}
\end{aligned}$$

3. **a)** *Calculs sur Ω* (avec les notations 2D)

   - Le 1^{er} terme de la matrice de rigidité K nécessite de connaître dans un premier temps

$$\begin{aligned}
\vec\nabla\vec N^{\,t}(x) &= \begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x_2}\end{bmatrix}\Big[N_1(x)\;N_2(x)\;N_3(x)\Big] = \Big[\vec\nabla N_1(x)\;\vec\nabla N_2(x)\;\vec\nabla N_3(x)\Big] \\
&= \begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial N_3}{\partial x_1}(x)\\[2mm] \dfrac{\partial N_1}{\partial x_2}(x) & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_2}(x) & \dfrac{\partial N_3}{\partial x_2}(x)\end{bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\right]^{t}\left[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\right] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial N_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial N_2}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial N_3}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial N_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial N_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial N_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial N_3}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vec{\nabla}N_1(x)\bullet\vec{\nabla}N_1(x) & \vec{\nabla}N_1(x)\bullet\vec{\nabla}N_2(x) & \vec{\nabla}N_1(x)\bullet\vec{\nabla}N_3(x) \\ \vec{\nabla}N_2(x)\bullet\vec{\nabla}N_1(x) & \vec{\nabla}N_2(x)\bullet\vec{\nabla}N_2(x) & \vec{\nabla}N_2(x)\bullet\vec{\nabla}N_3(x) \\ \vec{\nabla}N_3(x)\bullet\vec{\nabla}N_1(x) & \vec{\nabla}N_3(x)\bullet\vec{\nabla}N_2(x) & \vec{\nabla}N_3(x)\bullet\vec{\nabla}N_3(x) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Cette matrice étant constante, son intégration (*i.e.* l'intégration de chacun des composants) sur le domaine Ω équivaut à multiplier cette même matrice par l'aire $\frac{L^2}{2}$ du triangle Ω, et donc:

$$
\int_{\Omega} \mu\left[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\right]^{t}\left[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\right] d\Omega = \int_0^L \int_0^{L-x_1} \mu\left[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\right]^{t}\left[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\right] dx_2\, dx_1 = \frac{\mu}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

On obtient le 1^{er} terme de la matrice-colonne des forces $\vec{F}$ en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre qui est d'ordre 3 sur le triangle Ω,

$$
\int_{\Omega} \frac{c}{L}\left(1-\frac{x_1}{L}\right)\vec{N}(x)\, d\Omega = \int_0^L \int_0^{L-x_1} \frac{c}{L}\left(1-\frac{x_1}{L}\right)\vec{N}(x)\, dx_1\, dx_2 = \frac{c\,L}{24}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

b) *Calculs sur Γ* (avec les notations 2D)

Pour respecter l'orientation de Γ, le calcul des intégrales curvilignes doivent s'effectuer avec

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} f(x)\, d\Gamma &\equiv \int_0^L f(x_1, 0)\, dx_1 \;; \\
\int_{\Gamma_2} f(x)\, d\Gamma &\equiv \int_0^L f(L-x_2, x_2)\,\sqrt{2}\, dx_2 \equiv \int_0^L f(x_1, L-x_1)\,\sqrt{2}\, dx_1 \;; \\
\int_{\Gamma_3} f(x)\, d\Gamma &\equiv \int_{\underline{\underline{L}}}^0 f(0, x_2)\; dx_2 \equiv \int_0^L f(0, L-x_2)\, dx_2 \;.
\end{aligned}
$$

• Pour obtenir les $2^{ième}$ et $3^{ième}$ termes de K, il est nécessaire d'évaluer d'abord les termes suivants avec $x = (x_1, 0) \in \Gamma_1$:

$$\begin{aligned}
\vec{n}(x) &= \begin{bmatrix} n_1(x) \\ n_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} , \\
\big[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}\big](x) &= \begin{bmatrix} \vec{\nabla}N_1(x) & \vec{\nabla}N_2(x) & \vec{\nabla}N_3(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (différentier d'abord !)} , \\
\vec{N}(x) &= \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x_1}{L} \\ \dfrac{x_1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} , \\
\vec{n}^{\,t}(x)\big[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\big] &= \begin{bmatrix} n_1(x) & n_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial N_3}{\partial x_1}(x) \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial x_2}(x) & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_2}(x) & \dfrac{\partial N_3}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} \\
&= \Big[\vec{n} \bullet \vec{\nabla}N_1(x) \quad \vec{n} \bullet \vec{\nabla}N_2(x) \quad \vec{n} \bullet \vec{\nabla}N_3(x)\Big] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

Comme les composantes de la matrice suivante sont quadratiques

$$\vec{N}(x)\vec{N}^{\,t}(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{bmatrix} \Big[N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x)\Big] = \begin{bmatrix} \left(1 - \dfrac{x_1}{L}\right)^2 & \left(1 - \dfrac{x_1}{L}\right)\dfrac{x_1}{L} & 0 \\ \dfrac{x_1}{L}\left(1 - \dfrac{x_1}{L}\right) & \dfrac{x_1^2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la quadrature (1D) de Simpson suffit pour obtenir exactement

$$\int_{\Gamma_1} \vec{N}(x)\vec{N}(x)\, d\Gamma = \int_0^L \vec{N}(x)\vec{N}(x)\, dx_1 = \frac{L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Concernant les composantes affines de la matrice suivante

$$\vec{N}(x)\,\vec{n}^{\,t}(x)\big[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\big] = \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_1(x) & \vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_2(x) & \vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_3(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N_1(x)\;\vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_1(x) & N_1(x)\;\vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_2(x) & N_1(x)\;\vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_3(x) \\ N_2(x)\;\vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_1(x) & N_2(x)\;\vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_2(x) & N_2(x)\;\vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_3(x) \\ N_3(x)\;\vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_1(x) & N_3(x)\;\vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_2(x) & N_3(x)\;\vec{n}\bullet\vec{\nabla}N_3(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\dfrac{x_1}{L} \\ \dfrac{x_1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 1-\dfrac{x_1}{L} & 0 & \dfrac{x_1}{L}-1 \\ \dfrac{x_1}{L} & 0 & -\dfrac{x_1}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nous pouvons même utilisez la quadrature (1D) du RECTANGLE pour obtenir

$$\int_{\Gamma_1} -\mu\vec{N}(x)\vec{n}^{\,t}(x)\big[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\big]\,d\Gamma = \int_0^L -\mu\vec{N}(x)\vec{n}^{\,t}(x)\big[\vec{\nabla}\vec{N}^{\,t}(x)\big]\,dx_1 = \frac{-\mu}{2L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice de rigidité apparait alors en additionnant les précédents résultats intermédiaires,

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{L}{3}+\dfrac{\mu\,(2L-1)}{2L} & \dfrac{L}{6}-\dfrac{\mu}{2} & \dfrac{\mu\,(1-L)}{2L} \\ \dfrac{L}{6}-\dfrac{\mu\,(L+1)}{2L} & \dfrac{L}{3}+\dfrac{\mu}{2} & \dfrac{\mu}{2L} \\ -\dfrac{\mu}{2} & 0 & \dfrac{\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

• Concernant les termes de $\vec{F}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} U\vec{N}(x)\,d\Gamma &= \int_0^L U\begin{bmatrix} 1-\dfrac{x_1}{L} \\ \dfrac{x_1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} dx_1 = \frac{UL}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\int_{\Gamma_2} -\frac{c\,x_2^2}{2L\ell(x)}\vec{N}(x)\,d\Gamma &= \int_0^L \frac{-c\,x_2^2}{2\sqrt{2}L^2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1-\dfrac{x_2}{L} \\ \dfrac{x_2}{L} \end{bmatrix}\sqrt{2}\,dx_2 = \frac{-c\,L}{24}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \\
\int_{\Gamma_3} -\frac{c\,x_2^2}{2L\ell(x)}\vec{N}(x)\,d\Gamma &= \int_0^L \frac{-c}{2}\Big(1-\frac{x_2}{L}\Big)^2\begin{bmatrix} \dfrac{x_2}{L} \\ 0 \\ 1-\dfrac{x_2}{L} \end{bmatrix} dx_2 = \frac{-cL}{24}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

L'expression du vecteur des sollicitations extérieures est finalement $\vec{F} = \frac{L}{2}\begin{bmatrix} U + \frac{c}{6} \\ U + \frac{c}{12} \\ -\frac{c}{4} \end{bmatrix}$.

La détermination de $\vec{\tau}$ et de cette approximation non-cinématiquement admissible u_3 s'obtient alors en résolvant l'équation $K\vec{\tau} = \vec{F}$.

4. Si nous remplaçons u par $u_3 = U + N_3\,\tau_3$, et, ϕ par N_3 , dans la F.I. faible, il ne viendra alors qu'une seule équation scalaire: $K_{33}\,\tau_3 = F_3$. Selon les précédents calculs, cette équation vaut $\frac{\mu\,\tau_3}{2} = \frac{-cL}{8}$, et on en déduit que $\tau_3 = \frac{-cL}{4\mu}$. L'approximation (affine, et cinématiquement admissible) est ainsi telle que $u_3(x) = U + N_3(x)\tau_3 = U - \frac{c\,x_2}{4\mu}$.
Cette approximation cinématiquement admissible u_3 et la solution exacte

$$u_{ex}(x) = U - \frac{c\,x_2^2}{2\mu L}\left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \quad , \ \forall x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} = [0\,, L] \times [0, L - x_1] \ .$$

fournissent les valeurs suivantes aux 3 sommets et au barycentre du triangle $\bar{\Omega}$

$$\begin{aligned}
u_3(x_1, 0) &= U = u_{ex}(x_1, 0) \quad , \ \forall x_1 \in \{0, L/2, L\} \quad \text{(et même } \forall x_1 \in [0, L]) \\
u_3(0, L) &= U - \frac{cL}{4\mu} > u_{ex}(0, L) = U - \frac{cL}{2\mu} \\
u_3(0, L/2) &= U - \frac{cL}{8\mu} = u_{ex}(0, L/2) \\
u_3(L/2, L/2) &= U - \frac{cL}{8\mu} < u_{ex}(L/2, L/2) = U - \frac{cL}{16\mu} \\
u_3(L/3, L/3) &= U - \frac{cL}{12\mu} < u_{ex}(L/3, L/3) = U - \frac{cL}{27\mu}
\end{aligned}$$

en rappelant que les coefficients c et μ sont positifs.

Notez que les inégalités observées insinuent que l'approximation affine confère (à tort) un peu plus de rigidité à cette plaque. On ne peut donc se fier à cette approximation tant que l'erreur commise est relativement minime.

Solutions du TD n^{o}2: Ritz

1. *Conditions nécessaires de minimisation*

   Soit $\phi \in V_1^o$, la première variation de la fonctionnelle J_1 s'exprime alors

$$\delta_\phi J_1(T_{ex}) = \int_0^L \Big\{ k\,\frac{d\phi}{dx}(x)\,\frac{dT_{ex}}{dx}(x) - \big[c_o - c_1 x\big]\phi(x)\Big\}\,dx - h\,\phi(L)$$

   sous sa forme intégrale faible. Une intégration par partie et la condition de bord $\phi(0) = 0$ permettent d'obtenir la forme (intégrale) forte de cette première variation

$$\delta_\phi J_1(T_{ex}) = -\int_0^L \phi(x)\Big\{k\frac{d^2T_{ex}}{dx^2}(x) + \big[c_o - c_1 x\big]\Big\}\,dx + \phi(L)\Big[k\,\frac{dT_{ex}}{dx}(L) - h\Big]\ ,$$

   et de déduire que celle-ci s'annule, pour toute fonction $\phi \in V_1^o$, si et seulement si nous avons localement les conditions suivantes: $\begin{cases} k\dfrac{d^2T_{ex}}{dx^2}(x) = c_1 x - c_o\ , \text{ pour presque tout } x \in\,]0, L[\ ; \\ \text{avec}\quad T_{ex}(0) = T_o \quad \text{et} \quad k\dfrac{d\,T_{ex}}{dx}(L) = h\ . \end{cases}$

   Similairement, nous obtenons successivement pour J_2 et tout $(\phi, \tilde{\phi}) \in V_2$

$$\begin{aligned}
\delta_{(\phi,\tilde{\phi})} J_2(T_{ex}, \lambda_{ex}) &= \int_0^L \Big\{k\,\frac{d\phi}{dx}(x)\,\frac{dT_{ex}}{dx}(x) - \big[c_o - c_1 x\big]\phi(x)\Big\}\,dx - h\,\phi(L) \\
&\quad + \lambda_{ex(0)}\,\phi(0) + \tilde{\phi}\,[T_{ex}(0) - T_o] \\
&= -\int_0^L \phi(x)\Big\{k\frac{d^2T_{ex}}{dx^2}(x) + \big[c_o - c_1 x\big]\Big\}\,dx + \phi(L)\Big[k\,\frac{dT_{ex}}{dx}(L) - h\Big] \\
&\quad + \phi(0)\Big[\lambda_{ex(0)} - k\,\frac{dT_{ex}}{dx}(0)\Big] + \tilde{\phi}\,\big[T_{ex}(0) - T_o\big]\ .
\end{aligned}$$

   Cette première variation s'annule pour tout couple $(\phi, \tilde{\phi}) \in V_2$ que si et seulement nous avons, en plus des précédentes équations locales, $\lambda_{ex(0)} = k\,\dfrac{dT_{ex}}{dx}(0)$.

2. *Approximations*

   (a) L'approximation recherchée est une combinaison linéaire $T_m(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} N_j(x)\,\tau_j = \vec{N}^{\,t}(x)\,\vec{\tau}$ des composantes de $\vec{N} = \big[N_i\big]_{i=0,\ldots,m}$. Comme la propriété $N_i(0) = \delta_{ip}$ implique que $T_m(0) = \vec{N}^{\,t}(0)\vec{\tau} = \tau_p$, et que

$$\left[\frac{d\,T_m}{dx}(x)\right]^2 = \left[\frac{d\,T_m}{dx}(x)\right]^t \left[\frac{d\,T_m}{dx}(x)\right] = \left[\frac{d\,\vec{N}^{\,t}}{dx}(x)\,\vec{\tau}\right]^t \left[\frac{d\,\vec{N}^{\,t}}{dx}(x)\,\vec{\tau}\right] = \vec{\tau}^{\,t}\left[\frac{d\,\vec{N}}{dx}(x)\frac{d\,\vec{N}^{\,t}}{dx}(x)\right]\vec{\tau}\ ,$$

   les énergies s'expriment donc selon

$$\begin{aligned}
J_1(T_m) &= \int_0^L \frac{k}{2}\left[\frac{d\,T_m}{dx}(x)\right]^2 dx - \int_0^L \big[c_o - c_1 x\big]T_m(x)\,dx - h\,T_m(L) \\
&= \vec{\tau}^{\,t}\left\{\frac{1}{2}\Big[\int_0^L k\,\frac{d\,\vec{N}}{dx}(x)\frac{d\,\vec{N}^{\,t}}{dx}(x)\,dx\Big]\vec{\tau} - \int_0^L \big[c_o - c_1 x\big]\vec{N}(x)\,dx - h\,\vec{N}(L)\right\} \\
&= \vec{\tau}^{\,t}\Big\{\frac{1}{2}\,K\vec{\tau} - \vec{F}\Big\} \\
J_2(T_m, \lambda_m) &= J_1(T_m) + \lambda_{m(0)}\,[T_m(0) - T_o] = J_1(\vec{N}^{\,t}\vec{\tau}) + \lambda_{m(0)}\,[\tau_p - T_o]\ .
\end{aligned}$$

Notez que nos problèmes discrets peuvent alors se formuler simplement comme :

$$(\mathcal{P}_1)\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver le vecteur de paramètres de température } \vec{\tau}\in\mathbb{R}^{m+1} \text{ qui soit tel que}\\ \tau_0=T_o \text{ et qui minimise l'énergie potentielle} \quad J_1(\vec{N}^{\,t}\vec{\tau})=\vec{\tau}^{\,t}\Big\{\frac{1}{2}\,K\vec{\tau}-\vec{F}\Big\}\end{array}\right.$$

et

$$(\mathcal{P}_2)\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver le couple de vecteur de paramètres de température et de multiplicateur}\\ \text{de } \textsc{Lagrange } (\vec{\tau},\lambda_{m(0)})\in\mathbb{R}^{m+2} \text{ qui minimise l'énergie potentielle}\\ \qquad J_2(\vec{N}^{\,t}\vec{\tau},\lambda_m)=J_1(\vec{N}^{\,t}\vec{\tau})+\lambda_{m(0)}\,[\tau_p-T_o]\ .\end{array}\right.$$

(b) La première variation de la fonctionnelle $J_1(T_m)$ donne tout d'abord

$$\delta_{\phi_m}J_1(T_m)=\frac{1}{2}\left\{\vec{\varphi}^{\,t}K\vec{\tau}+\vec{\tau}^{\,t}K\vec{\varphi}\right\}-\vec{\varphi}^{\,t}\vec{F}\ ,\ \forall\phi_m=\vec{N}^{\,t}\vec{\varphi}$$

Cependant $\vec{\tau}^{\,t}K\vec{\varphi}=\left[\vec{\tau}^{\,t}K\vec{\varphi}\right]^t=\vec{\varphi}^{\,t}K^t\vec{\tau}\in\mathbb{R}$ (car tout scalaire est égale à sa transposée), et même $\vec{\tau}^{\,t}K\vec{\varphi}=\vec{\varphi}^{\,t}K\vec{\tau}$ car $K=K^t$ (*i.e.* $\underline{K \text{ est symétrique !}}$). Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl}\delta_{\phi_m}J_1(T_m) & = & \frac{1}{2}\left\{\vec{\varphi}^{\,t}K\vec{\tau}+\vec{\varphi}^{\,t}K^t\vec{\tau}\right\}-\vec{\varphi}^{\,t}\vec{F}\ =\ \vec{\varphi}^{\,t}\left\{K\vec{\tau}-\vec{F}\right\}\\ & \overset{\varphi_p=0}{=} & \displaystyle\sum_{\substack{i=0\\ i\neq p}}^{m}\ \varphi_i\left\{\sum_{j=0}^{m}K_{ij}\,\tau_j-F_i\right\}\ \equiv\ \sum_{\substack{i=0\\ i\neq p}}^{m}\ \varphi_i\ \frac{\partial J_1}{\partial\tau_i}(\vec{N}^{\,t}\vec{\tau})\end{array}$$

La condition de stationnarité requière ici que cette première variation soit nulle pour toute fonction $\vec{\varphi}\in\mathbb{R}^{m+1}$ telle que $\underline{\underline{\varphi_p=0}}$, ce qui est donc possible que si et seulement si

$$\frac{\partial J_1}{\partial\tau_i}(T_m)\ =\sum_{j=0}^{m}K_{ij}\,\tau_j-F_i=0\ ,\ \forall i\in\{0,\ldots,m\}\setminus\{p\}\ .$$

Les conditions nécessaires de minimisation sont finalement :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sum_{j=0}^{m}\delta_{pj}\,\tau_j & = & T_o \quad\Leftrightarrow\quad \tau_p=T_o\\ \sum_{j=0}^{m}K_{ij}\,\tau_j & = & F_i \quad ,\quad \forall\, i\in\{0,\ldots,m\}\setminus\{p\}\end{array}\right. .$$

(c) Nous pouvons attribuer à la $1^{ère}$ équation l'indice $i=p$. Nous constatons alors aisément que ce système d'équations est équivalent à :
i) $K'\vec{\tau}=\vec{F}'$, avec

$$\begin{array}{rcl}K' & = & \left[Id-\vec{N}(0)\,\vec{N}^{\,t}(0)\right]K+\vec{N}(0)\,\vec{N}^{\,t}(0)\ \equiv\ \left[\big(1-\delta_{pi}\,\delta_{pj}\big)K_{ij}+\delta_{pi}\,\delta_{pj}\right]_{i,j=0,\ldots,m}\\ \vec{F}' & = & \left[Id-\vec{N}(0)\,\vec{N}^{\,t}(0)\right]\vec{F}+\vec{N}(0)\,T_o\ \equiv\ \left[\big(1-\delta_{pi}\big)F_i+\delta_{pi}\,T_o\right]_{i=0,\ldots,m}\end{array}$$

En pratique, si q désigne le rang de la composante qui est donnée dans $\vec{\tau}$ (*i.e.* ici $q=p+1$ et $\tau_p=T_o$), alors on déduit $(K',\vec{F}')$ *de* $(K,\vec{F})$:

1°- *en annulant, dans la* $q^{\text{ème}}$ *ligne de* K, *tous les coefficients sauf celui qui est à l'intersection avec la* $q^{\text{ème}}$ *colonne qui prend la valeur* 1*;*

2°- *et en remplaçant la* $q^{\text{ème}}$ *composante de* $\vec{F}'$ *par la valeur* T_o *donnée.*

ii) $K''\vec{\tau} = \vec{F}''$, avec

$$\begin{aligned}
K'' &= \big[Id - \vec{N}(0)\,\vec{N}^{\,t}(0)\big]K\big[Id - \vec{N}(0)\,\vec{N}^{\,t}(0)\big] + \vec{N}(0)\,\vec{N}^{\,t}(0)\\
&\equiv \Big[\big(1-\delta_{pi}\big)\big(1-\delta_{pj}\big)K_{ij} + \delta_{pi}\,\delta_{pj}\Big]_{i,j=0,\ldots,m}\\
\vec{F}' &= \big[Id - \vec{N}(0)\,\vec{N}^{\,t}(0)\big]\vec{F} + \vec{N}(0)\,T_o \;\equiv\; \Big[\big(1-\delta_{pi}\big)\big(F_i - T_o K_{pi}\big) + \delta_{pi}\,T_o\Big]_{i=0,\ldots,m}
\end{aligned}$$

(revient à simplifier les conditions données pour $i \neq p$, avec celle donnée pour $i = p$)

En pratique, si q désigne le rang de la composante qui est donnée dans $\vec{\tau}$, alors on déduit $(K', \vec{F}')$ *de* $(K, \vec{F})$: 1°- *en annulant, dans les* $q^{\text{ème}}$ *ligne et colonne de* K*, tous les coefficients sauf celui qui est sur la diagonale qui prend la valeur* 1*;* 2°- *et en remplaçant la* $q^{\text{ème}}$ *composante de* $\vec{F}'$ *par la valeur* T_o *donnée.*

iii) $\begin{cases} T_m(0) = \tau_p = T_o \\ \check{K}\vec{\check{\tau}} = \vec{\check{F}} \end{cases}$, avec $\check{K}_{ij} = K_{ij}$, $\check{\tau}_j = \tau_j$, $\check{F}_i = F_i - K_{ip}T_o$, $\forall\, i,j \in \{0,\ldots,m\} \setminus \{p\}$.

(idem, mais en écrivant partiellement les conditions sous forme matricielle)

En pratique, si q désigne le rang de la composante qui est donnée dans $\vec{\tau}$, alors on déduit $(\check{K}, \vec{\check{\tau}}, \vec{\check{F}})$ *de* $(K, \vec{\tau}, \vec{F})$: 1°- *en retranchant à* $\vec{F}$ *le produit* $q^{\text{ème}}$ *colonne de* K *par la valeur donnée* T_o *;* 2°- *puis en supprimant, d'une part, la* $q^{\text{ème}}$ *ligne et la* $q^{\text{ème}}$ *colonne de* K*, et d'autre part, les* $q^{\text{ème}}$ *composantes de* $\vec{\tau}$ *et de* $\vec{F}$*.*

(d) Nous obtenons pour la seconde fonctionnelle

$$\widetilde{J}_1(T_m,\lambda_m) \;=\; J_1(T_m) + \lambda_{m(0)}\Big[\vec{\tau}^{\,t}\vec{N}(0) - T_o\Big] \;=\; J_1(T_m) + \lambda_{m(0)}\Big[\tau_p - T_o\Big] \quad (\text{car } N_i(0) = \delta_{ip}).$$

Celle-ci a pour première variation

$$\begin{aligned}
\delta_{(\phi_m,\widetilde{\varphi})}\widetilde{J}_1(T_m,\lambda_m) \quad &= \quad \frac{1}{2}\Big\{\vec{\varphi}^{\,t}K\vec{\tau} + \vec{\tau}^{\,t}K\vec{\varphi}\Big\} - \vec{\varphi}^{\,t}\vec{F} + \lambda_{m(0)}\,\vec{\varphi}^{\,t}\vec{N}(0) + \widetilde{\varphi}\Big[\vec{\tau}^{\,t}\vec{N}(0) - T_o\Big]\\
&\overset{K=K^t}{\equiv} \quad \vec{\varphi}^{\,t}\Big\{K\vec{\tau} - \vec{F} + \lambda_{m(0)}\,\vec{N}(0)\Big\} + \widetilde{\varphi}\Big[\vec{\tau}^{\,t}\vec{N}(0) - T_o\Big]\\
&\overset{N_i(0)=\delta_{ip}}{\equiv} \quad \sum_{i=0}^{m}\Big\{\sum_{j=0}^{m}K_{ij}\,\tau_j - F_i + \delta_{ip}\,\lambda_{m(0)}\Big\}\,\varphi_i + \Big[\tau_p - T_o\Big]\widetilde{\varphi}\\
&\equiv \quad \sum_{i=0}^{m}\frac{\partial\widetilde{J}_1}{\partial\tau_i}(\vec{\tau},\lambda_m)\,\varphi_i + \frac{\partial\widetilde{J}_1}{\partial\lambda_{m(0)}}(\vec{\tau},\lambda_m)\,\widetilde{\varphi}
\end{aligned}$$

où $\phi_m = \vec{N}^t\vec{\varphi}$, et $(\vec{\varphi},\widetilde{\varphi}) \in \mathbb{R}^{m+2}$. La condition de stationnarité équivaut alors à

$$\vec{\nabla}_{(\vec{\tau},\lambda_m)}\widetilde{J}_1(T_m,\lambda_m) = \vec{0} \in \mathbb{R}^{m+2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\widetilde{J}_1}{\partial\tau_p}(T_m,\lambda_m) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m}K_{pj}\,\tau_j + \lambda_{m(0)} - F_p = 0 \ , \\ \dfrac{\partial\widetilde{J}_1}{\partial\tau_i}(T_m,\lambda_m) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m}K_{ij}\,\tau_j - F_i = 0 \ , \ \forall i \in \{0,\ldots,m\}\setminus\{p\}, \\ \dfrac{\partial\widetilde{J}_1}{\partial\lambda_{m(0)}}(T_m,\lambda_m) = \tau_p - T_o = 0 \ . \end{cases}$$

Nous observons que les $m+1$ dernières équations de stationnarité sont celles présentées en (b), alors que la première donne la valeur de

$$\lambda_{m(0)} = F_p - \sum_{j=0}^{m} K_{pj}\,\tau_j \overset{N_i(0)=\delta_{ip}}{=} \vec{N}^{\,t}(0)\big[\vec{F} - K\vec{\tau}\big] \;.$$

> En pratique, si q désigne le rang de la composante qui est donnée dans $\vec{\tau}$, alors on déduit $\lambda_{m(0)}$ *en retranchant la valeur du* <u>produit scalaire</u> *de la* $q^{\text{ème}}$ *ligne de* K *avec* $\vec{\tau}$ *à la* $q^{\text{ème}}$ *composante de* $\vec{F}$.

3. <u>*Applications numériques*</u>

   (a) Calcul de T_1.
   Nous avions déjà calculé (*cf.* partie 2 du TD n^{o}1)

$$\begin{aligned}
\int_0^L k\,\frac{d\vec{N}}{dx}(x)\frac{d\vec{N}^t}{dx}(x)\,dx &= \frac{k}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = K \\
\int_0^L \big[c_o - c_1 x\big]\vec{N}(x)\,dx + h\,\vec{N}(L) &= \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{2} - \dfrac{c_1L^2}{6} \\ \dfrac{c_oL}{2} - \dfrac{c_1L^2}{3} + h \end{bmatrix} = \vec{F}
\end{aligned}$$

   La méthode *i)* va permettre d'obtenir $\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_o \\ \tau_1 \end{bmatrix}$, s'il est possible d'inverser l'équation suivante $K'\vec{\tau} = \vec{F}'$, dans laquelle $K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-k}{L} & \dfrac{k}{L} \end{bmatrix}$ et $\vec{F}' = \begin{bmatrix} T_o \\ \dfrac{c_oL}{2} - \dfrac{c_1L^2}{3} + h \end{bmatrix}$.
   Puisque $\det\big(K'\big) = \dfrac{k}{L} \neq 0$ et $K'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{L}{k} \end{bmatrix}$, nous obtenons effectivement alors

$$\vec{\tau} = K'^{-1}\vec{F}' = \begin{bmatrix} T_o \\ T_o + \dfrac{L}{k}\left(\dfrac{c_oL}{2} - \dfrac{c_1L^2}{3} + h\right) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_{ex}(0) \\ T_{ex}(L) \end{bmatrix} .$$

   Nous retrouvons ainsi l'approximation cinématiquement admissible de la partie **3b)** du TD n^{o}1:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \vec{N}^{\,t}\,\vec{\tau} = \left(1 - \frac{x}{L}\right)T_o + \frac{x}{k}\left(T_o + \frac{c_oL}{2} - \frac{c_1L^2}{3} + h\right) \\
&= T_o + \frac{x}{k}\left(\frac{c_oL}{2} - \frac{c_1L^2}{3} + h\right)
\end{aligned}$$

   (b) Calcul de T_2.

Nous avions déjà calculé (*cf.* partie 2 du TD n^{o}1)

$$\int_0^L \big[c_o - c_1 x\big]\vec{N}(x)\,dx + h\,\vec{N}(L) = \begin{bmatrix} \dfrac{c_o L}{6} \\ \dfrac{2c_o L}{3} - \dfrac{c_1 L^2}{3} \\ \dfrac{c_o L}{6} + h - \dfrac{c_1 L^2}{6} \end{bmatrix} = \vec{F}$$

Le calcul de la matrice K nécessite notamment les deux résultats intermédiaires suivants

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{N}^{\,t}}{dx}(x) &= \frac{1}{L}\begin{bmatrix} \dfrac{4x}{L}-3 & 4-\dfrac{8x}{L} & \dfrac{4x}{L}-1 \end{bmatrix} \\
\frac{d\vec{N}}{dx}(x)\frac{d\vec{N}^{\,t}}{dx}(x) &= \frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} \dfrac{4x}{L}-3 \\ 4-\dfrac{8x}{L} \\ \dfrac{4x}{L}-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{4x}{L}-3 & 4-\dfrac{8x}{L} & \dfrac{4x}{L}-1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} \left(\dfrac{4x}{L}-3\right)^2 & \left(\dfrac{4x}{L}-3\right)\left(4-\dfrac{8x}{L}\right) & \left(\dfrac{4x}{L}-3\right)\left(\dfrac{4x}{L}-1\right) \\ Sym & \left(4-\dfrac{8x}{L}\right)^2 & \left(4-\dfrac{8x}{L}\right)\left(\dfrac{4x}{L}-1\right) \\ Sym & Sym & \left(\dfrac{4x}{L}-1\right)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Les intégrales des composantes "*quadratiques*" de cette matrice sur $[0, L]$ s'obtiennent avec la quadrature de Simpson, et donnent ainsi

$$K = \int_0^L k\,\frac{d\vec{N}}{dx}(x)\frac{d\vec{N}^{\,t}}{dx}(x)\,dx = \frac{k}{3L}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Connaissant $\tau_0 = T_o$, la méthode *iii)* va permettre d'obtenir $\vec{\check{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$ s'il est possible d'inverser l'équation suivante

$$\check{K}\vec{\check{\tau}} = \vec{\check{F}} \quad \text{avec} \quad \check{K} = \frac{k}{3L}\begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\check{F}} = \begin{bmatrix} \dfrac{2c_o L}{3} - \dfrac{c_1 L^2}{12} + \dfrac{8kL}{3}T_o \\ \dfrac{c_o L}{6} + h - \dfrac{c_1 L^2}{6} - \dfrac{kL}{3}T_o \end{bmatrix}.$$

Or $\det(\check{K}) = \dfrac{16k^2}{3L^2} \neq 0$ et $\check{K}^{-1} = \dfrac{\big[\text{Com }\check{K}\big]^t}{\det\big(\check{K}\big)} = \begin{bmatrix} \dfrac{7L}{16\,k} & \dfrac{L}{2\,k} \\ \dfrac{L}{2\,k} & \dfrac{L}{k} \end{bmatrix}$. Nous déduisons donc

que $\vec{\check{\tau}} = \check{K}^{-1}\vec{\check{F}} = \begin{bmatrix} T_o + \dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{3c_o L}{4} + h - \dfrac{11c_1 L^2}{24}\right) \\ T_o + \dfrac{L}{k}\left(\dfrac{c_o L}{2} + h - \dfrac{c_1 L^2}{3}\right) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_{ex}(L/2) \\ T_{ex}(L) \end{bmatrix}$, et retrouvons ensuite l'approximation cinématiquement admissible de la partie **3c)** du TD n^{o}1:

$$
\begin{aligned}
T_2(x) &= \vec{N}^{\,t}(x)\,\vec{\tau} \\
&= \left(1-\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{2x}{L}\right)T_o \;+\; \frac{4x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\left[T_o \;+\; \frac{L}{2k}\left(\frac{3c_oL}{4}+h-\frac{11c_1L^2}{24}\right)\right] \\
&\quad + \frac{x}{L}\left(\frac{2x}{L}-1\right)\left[T_o \;+\; \frac{L}{k}\left(\frac{c_oL}{2}+h-\frac{c_1L^2}{3}\right)\right] \\
&= T_o \;+\; \frac{x}{k}\left[c_o\left(L-\frac{x}{2}\right)+h+\frac{c_1L}{4}\left(x-\frac{7L}{3}\right)\right]
\end{aligned}
$$

(c) Les calculs des multiplicateurs de LAGRANGE et des flux en $x=0$ donnent ici

$$
\begin{aligned}
\lambda_{ex}(0) &= \frac{dT_{ex}}{dx}(0) \;=\; h \;+\; c_oL \;-\; \frac{c_1L^2}{2} \\
\lambda_1(0) &= F_0-\left[K_{00}\,\tau_0+K_{01}\,\tau_1\right] \\
&= \frac{c_oL}{2}-\frac{c_1L^2}{6}+\frac{k}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_o \\ T_o+\dfrac{L}{k}\left(\dfrac{c_oL}{2}-\dfrac{c_1L^2}{3}+h\right)\end{bmatrix} \;\equiv\; \lambda_{ex}(0) \\
\lambda_2(0) &= F_0-\left[K_{00}\,\tau_0+K_{01}\,\tau_1+K_{02}\,\tau_2\right] \\
&= \frac{c_oL}{2}+\frac{k}{3L}\begin{bmatrix}7 & -8 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_o \\ T_o+\dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{3c_oL}{4}+h-\dfrac{11c_1L^2}{24}\right) \\ T_o+\dfrac{L}{k}\left(\dfrac{c_oL}{2}+h-\dfrac{c_1L^2}{3}\right)\end{bmatrix} \;\equiv\; \lambda_{ex}(0) \\
k\,\frac{dT_1}{dx}(0) &= h+\frac{c_oL}{2}-\frac{c_1L^2}{3} \;\neq\; k\,\frac{dT_{ex}}{dx}(0) \\
k\,\frac{dT_2}{dx}(0) &= h+c_oL-\frac{7c_1L^2}{12} \;\neq\; k\,\frac{dT_{ex}}{dx}(0)
\end{aligned}
$$

Il apparait que la valeur du flux réel $k\,\dfrac{dT_{ex}}{dx}(0)$ est toujours mieux "approximée" par les multiplicateurs de LAGRANGE $\lambda_m(0)$ que par les valeurs de flux $k\,\dfrac{dT_m}{dx}(0)$!

Problème 2 : Plaque élastique chargée perpendiculairement à son plan moyen de repos.

1. En remplaçant u par $u_3 = \vec{N}^t \vec{\tau}$, et ϕ par $\vec{N} = \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x_1}{L} - \dfrac{x_2}{L} \\ \dfrac{x_1}{L} \\ \dfrac{x_2}{L} \end{bmatrix}$

   on aboutit alors au problème de minimisation suivant

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \textit{Trouver dans l'espace fonctionnelle} \\ V_3 = \Big\{ u_3 = \vec{N}^t \vec{\tau} \in \mathcal{H}^1(\bar{\Omega}) \text{ avec } \vec{\tau} \in \mathbb{R}^3, \text{ et } u_3(x_1, 0) = \tau_1 + \dfrac{x_1}{L}(\tau_2 - \tau_1) = U, \forall x_1 \in \{0, L\} \Big\} \\ \textit{la fonction qui minimise l'énergie potentielle} \quad J_1(u_3) = \vec{\tau}^{\,t} \Big\{ \dfrac{1}{2} K \vec{\tau} - \vec{F} \Big\} \end{array} \right.$$

   dans lequel (en ré-utilisant simplement certaines parties de la correction TD n^{o}2)

$$\begin{aligned} K &= \int_\Omega \mu \left[\vec{\nabla} \vec{N}^t(x) \right]^t \left[\vec{\nabla} \vec{N}^t(x) \right] d\Omega = \frac{\mu}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \\ \vec{F} &= \int_\Omega \frac{c}{L} \Big(1 - \frac{x_1}{L} \Big) \vec{N}(x) \, d\Omega - \int_{\Gamma \backslash \Gamma_1} \frac{c\, x_2^2}{2L\ell(x)} \vec{N}(x) \, d\Gamma \;=\; \frac{c\,L}{24} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   La condition cinématique $u_3(x_1, 0) = U$ avec $x_1 \in \{0, L\}$ qui est imposée sur Γ_1 donne en fait $\tau_1 = \tau_2 = U$. Il est alors judicieux d'effectuer la détermination de $\vec{\tau}$ selon la méthode de réduction d'équations (*i.e.* comme pour obtenir $\check{K}\vec{\tau} = \check{\vec{F}}$) , car cela ne laisse qu'une seule équation scalaire de stationnarité: $K_{33}\tau_3 = F_3 - (K_{31} + K_{32})U$. Nous trouvons finalement

$$\tau_3 = \frac{-2}{\mu} \left[\frac{c\,L}{24} + \frac{\mu}{2}(-1 + 0)U \right] = U - \frac{c\,L}{4\mu}$$

   et nous retrouvons donc la solution

$$u_3 = \big[N_1(x) + N_2(x) \big] U + N_3(x)\, \tau_3 = \Big[1 - \frac{x_2}{L} \Big] U + \frac{x_2}{L} \Big[U - \frac{c\,L}{4\mu} \Big] = U - \frac{c\,x_2}{4\mu} \; .$$

2. (a) Le calcul des multiplicateurs de Lagrange d'approximation donne

$$\begin{aligned} \lambda_3(0,0) &= F_1 - (K_{11} + K_{12})U - K_{13}\tau_3 \;=\; \frac{c\,L}{24} - \frac{\mu}{2}(2-1)\,U - \frac{-\mu}{2} \Big[U - \frac{c\,L}{4\mu} \Big] \;=\; \frac{-c\,L}{12} \\ \lambda_3(0,L) &= F_2 - (K_{21} + K_{22})U - K_{23}\tau_3 \;=\; \frac{c\,L}{24} - \frac{\mu}{2}(-1+1)\,U - 0 \;=\; \frac{c\,L}{24} \end{aligned}$$

   (b) Les calculs des valeurs limites de flux donnent

$$\begin{aligned} \mu\, L \frac{\partial u_3}{\partial n}(x_1, 0^+) &= -\mu\, L \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, 0^+) \;=\; \frac{c\,L}{4} \;, \;\forall\, x_1 \in]0, L[\\ \mu\, L \frac{\partial u_{ex}}{\partial n}(x_1, 0^+) &= -\mu\, L \frac{\partial u_{ex}}{\partial x_2}(x_1, 0^+) \;=\; 0 \;, \;\forall\, x_1 \in]0, L[\end{aligned}$$

Nous constatons que les multiplicateurs donnent quand même de meilleurs estimations des valeurs des forces de réaction (= du flux) sur Γ_1.

Solutions du TD n^{o}3: Eléments finis

1. En reprenant un raisonement du TD n^{o}2 (où $p = n = 1$), nous déduisons que l'expression de l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} J_1(T_n) &= \sum_{e=1}^{p} \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{k}{2} \left[\frac{d\,T_p}{dx}(x) \right]^2 - \left[c_o - c_1\, x \right] T_n\,(x) \right\} dx - h\, T_n\,(L) \\ &= \sum_{e=1}^{p} J(T_{n_{/\,\Omega_e}}) \;=\; \sum_{e=1}^{p} \vec{\tau}_e^{\,t} \left[\frac{1}{2}\, K_e\, \vec{\tau}_e - \vec{F}_e \right] . \end{aligned}$$

2. <u>*Approximation avec $p = 2$ éléments et $n + 1 = 3$ noeuds .*</u>

   (a) Les transformations géométriques isoparamétriques

$$\begin{array}{ccl} \bar{\Omega}_r = [0,1] & \stackrel{x}{\longrightarrow} & \bar{\Omega}_e = \left[X_{n_g(e,0)}, X_{n_g(e,m_e)} \right] \\ y & \longmapsto & x(y) = \vec{\tilde{N}}_1^{\,t}(y)\, \vec{\tilde{X}}_e \ , \ \text{avec } \vec{\tilde{N}}_1 = \begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix} \text{ et } \vec{\tilde{X}}_e = \begin{bmatrix} X_{n_g(e,0)} \\ X_{n_g(e,m_e)} \end{bmatrix} \end{array}$$

   sont, plus explicitement, comme $x(y) = \begin{cases} \dfrac{L\,y}{2} & \in \ \bar{\Omega}_1 = [0, L/2] \\ \dfrac{L\,(1+y)}{2} & \in \ \bar{\Omega}_2 = [L/2, L] \end{cases} \quad , \forall y \in \bar{\Omega}_r$.

   Puisque

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} dx & = & \dfrac{d\,\vec{\tilde{N}}_1^{\,t}}{dy}(y)\, dy\ \vec{\tilde{X}}_e & = & \left[X_{n_g(e,m_e)} - X_{n_g(e,0)} \right] dy & = & \dfrac{L}{2}\, dy \\ \dfrac{d\vec{N}_e}{dx}(x) & = & \dfrac{d\,\vec{\tilde{N}}_1}{dy}(y)\, \dfrac{dy}{dx}(x) & = & \dfrac{2}{L}\, \dfrac{d\,\vec{\tilde{N}}_1}{dy}(y) & = & \dfrac{2}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. , \forall x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$$

   nous avons alors

$$\begin{aligned} K_e &= \frac{2}{L} \int_0^1 k\, \frac{d\,\vec{\tilde{N}}_1}{dy}(y)\ \frac{d\,\vec{\tilde{N}}_1^{\,t}}{dy}(y)\, dy \;=\; \frac{2k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ \text{pour } e = 1,2 \\ \vec{F}_1 &= \frac{L}{2} \int_0^1 \left[c_o - \frac{c_1\, y\, L}{2} \right] \vec{\tilde{N}}_1(y)\, dy \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{c_o L}{4} - \dfrac{c_1 L^2}{24} \\ \dfrac{c_o L}{4} - \dfrac{c_1 L^2}{12} \end{bmatrix} , \\ \vec{F}_2 &= \frac{L}{2} \int_0^1 \left[c_o - \frac{c_1\,(1+y)\, L}{2} \right] \vec{\tilde{N}}_1(y)\, dy \ + \ h\, \vec{\tilde{N}}_1(1) \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{c_o L}{4} - \dfrac{c_1 L^2}{6} \\ \dfrac{c_o L}{4} - \dfrac{5 c_1 L^2}{24} + h \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

   (b) La table de connectivité de cette formulation en éléments finis est selon

$\mathbf{n_l}$ / **e**	0	$m = 1$
1	$n_g(1,0) = 1$	$n_g(1,m) = 2$
$p = 2$	$n_g(p,0) = 2$	$n_g(p,m) = 3$

Elle aide à ré-exprimer l'énergie selon $J(T_2) = \vec{\tau}^{\,t}\left[\frac{1}{2}\,K\,\vec{\tau} - \vec{F}\right]$, notamment en indiquant que les composantes de $\vec{\tau} = [\tau_{ng}]_{ng=1,2,3}$ y sont multipliées par celles de

$$K = \frac{2k}{L}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc} 1+0 & -1+0 & 0+0 \\ -1+0 & 1+1 & 0-1 \\ 0+0 & 0-1 & 0+1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{array} \end{array} = \frac{2k}{L}\left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\vec{F} = \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{array}\left[\begin{array}{c} \frac{c_oL}{4} - \frac{c_1L^2}{24} \\ \frac{c_oL}{4} - \frac{c_1L^2}{12} \\ 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{c_oL}{4} - \frac{c_1L^2}{6} \\ \frac{c_oL}{4} - \frac{5c_1L^2}{24} + h \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{c_oL}{4} - \frac{c_1L^2}{24} \\ \frac{c_oL}{2} - \frac{c_1L^2}{4} \\ \frac{c_oL}{4} - \frac{5c_1L^2}{24} + h \end{array}\right].$$

(c) • Comme au TD n^o2, la condition limite $T_o = T_{2_{/\bar{\Omega}_1}}(0) = \tau_{ng(1,0)} = \tau_1$, nous permet de *réduire* la condition de stationnarité à une équation matricielle telle que $\check{K}\check{\tau} = \check{\vec{F}}$, et où

$$\check{\vec{\tau}} = \left[\begin{array}{c} \tau_2 \\ \tau_3 \end{array}\right] \quad , \quad \check{K} = \frac{2k}{L}\left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{et} \quad \check{\vec{F}} = \left[\begin{array}{c} \frac{c_oL}{2} - \frac{c_1L^2}{4} + \frac{2kT_o}{L} \\ \frac{c_oL}{4} - \frac{5c_1L^2}{24} + h \end{array}\right].$$

Or ici $\check{K}^{-1} = \frac{L}{2k}\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right]$, et donc $\check{\vec{\tau}} = \left[\begin{array}{c} T_o + \frac{L}{2k}\left(\frac{3c_oL}{4} - \frac{11c_1L^2}{24} + h\right) \\ T_o + \frac{L}{k}\left(\frac{c_oL}{2} - \frac{c_1L^2}{3} + h\right) \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{c} T_{ex}(L/2) \\ T_{ex}(L) \end{array}\right].$

• L'expression de l'approximation T_2 est obtenue, par exemple, en exprimant la transformation géométrique inverse

$$y(x) = \frac{x - X_{ng(e,0)}}{X_{ng(e,m_e)} - X_{ng(e,0)}} = \begin{cases} \frac{2x}{L} & , \text{ si } x \in \bar{\Omega}_1 = [0, L/2] \\ \frac{2x}{L} - 1 & , \text{ si } x \in \bar{\Omega}_2 = [L/2, L] \end{cases}$$

dans le vecteur $\vec{\vec{N}}_1$, puis en effectuant nos deux produits $T_{2_{/\bar{\Omega}_e}}(x) = \vec{\vec{N}}_1^{\,t}(y(x))\,\vec{\tau}_e$ avec

$$\vec{\tau}_1 = \left[\begin{array}{c} \tau_{n_g(1,0)} \\ \tau_{n_g(1,1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \end{array}\right], \vec{\tau}_2 = \left[\begin{array}{c} \tau_{n_g(2,0)} \\ \tau_{n_g(2,1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \tau_2 \\ \tau_3 \end{array}\right].$$

Le résultat est alors telle que

$$\begin{aligned} T_{2_{/\Omega_1}}(x) &= T_{ex}(0) + \Big[T_{ex}(L/2) - T_{ex}(0)\Big]\,y(x) \\ T_{2_{/\Omega_2}}(x) &= T_{ex}(L/2) + \Big[T_{ex}(L) - T_{ex}(L/2)\Big]\,y(x) \end{aligned}$$

• La méthode des multiplicateurs de Lagrange (discrète) donne

$$\begin{aligned} \lambda_2(0) &= F_1 - K_{1\,1}\,\tau_1 - K_{1\,2}\,\tau_2 - K_{1\,3}\,\tau_3 \\ &= \frac{c_oL}{4} - \frac{c_1L^2}{24} - \frac{2kT_o}{L} + \frac{2k}{L}\left[T_o + \frac{L}{2k}\left(\frac{3c_oL}{4} - \frac{11c_1L^2}{24} + h\right)\right] + 0 \\ &= c_oL - \frac{c_1L^2}{2} + h \;\equiv\; k\frac{dT_{ex}}{dx}(0) \end{aligned}$$

(**Exercices supplémentaires : raffinements de l'approximation.**)

3. *Effets d'une transformation géométrique nonlinéaire*

(a) • Cette transformation géométrique

$$x(y) = (2y-1)y\big[X_3+X_2-2X_G\big]+2y\big[X_G-X_2\big]+X_2 \quad , \text{ avec } X_G \in \Omega_2 =]X_2, X_3[=]L/2, L[$$

est effectivement non-linéaire, et plus précisément quadratique, si $X_G \neq \dfrac{X_3 + X_2}{2} = \dfrac{3L}{4}$ (dans le cas contraire, on retrouve la transformation affine de la partie **2.**)

• La régularité de cette transformation quadratique est assurée si sa dérivée

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{d\,\vec{\tilde{N}}_2^{\,t}}{dy}(y)\ \vec{\tilde{X}}_2 \;=\; (4y-1)\big[X_3 + X_2 - 2X_G\big] + 2\big[X_G - X_2\big]$$

qui est alors une *fonction non-constante* de $y \in \bar{\Omega}_r = [0,1]$, ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}_r$ (et conserve ainsi son signe sur $\bar{\Omega}_r$). Cette condition requière que

$$\frac{1}{4} - \frac{X_G - X_2}{2\big[X_3 + X_2 - 2X_G\big]} \notin \Omega_r = [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad X_G \in]5L/8, 7L/8[\ .$$

Lorsque toutes ces conditions sont satisfaites, $x(y)$ établit alors une bijection non-linéaire (qui est même strictement croissante) entre $\bar{\Omega}_r$ et $\bar{\Omega}_2$, avec notamment $x(1/2) = X_G$.

(b) Si on veut utiliser des quadratures d'interpolation polynômiale qui seront définies sur $\bar{\Omega}_r$, alors on voit que la relation suivante

$$\frac{d\vec{N}_2}{dx}(x) \;=\; \frac{d\vec{\tilde{N}}_2}{dy}(y)\ \frac{dy}{dx}(x) \;=\; \frac{\dfrac{d\vec{\tilde{N}}_2}{dy}(y)}{(4y-1)\big[X_3 + X_2 - 2X_G\big] + 2\big[X_G - X_2\big]}$$

ne permet pas d'obtenir le résultat exact de la matrice de rigidité

$$K_2 \;=\; \int_0^1 k\,\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d\,\vec{\tilde{N}}_2}{dy}(y)\frac{d\,\vec{\tilde{N}}_2^{\,t}}{dy}(y)\,\frac{dx}{dy}\,dy \;=\; \int_0^1 k\,\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d\,\vec{\tilde{N}}_2}{dy}(y)\frac{d\,\vec{\tilde{N}}_2^{\,t}}{dy}(y)\,dy\ ,$$

car les fonctions à intégrer ne sont pas polynômiales mais rationnelles. Ce problème n'est néanmoins pas rencontré avec le vecteur des sollicitations extérieures F_2 car il ne dépend pas de la précédente dérivée.

Toutefois, K_2 peut être calculée exactement avec la quadrature polynômiale de Simpson (par exemple) sur $\bar{\Omega}_2$. Nous devons alors exprimer dans $\vec{N}_2(x) = \vec{\tilde{N}}_2\big(y(x)\big) = \begin{bmatrix} 1 - y(x) \\ y(x) \end{bmatrix}$ la fonction de transformation géométrique inverse et qui est telle que

$$y(x) = \frac{x - X_2}{X_3 - X_G}\left[\frac{X_3 - x}{2\big(X_G - X_2\big)} + \frac{x - X_G}{X_3 - X_2}\right] \in \bar{\Omega}_r = [0,1] \quad ,\forall x \in \bar{\Omega}_2 = [X_2, X_3] = [L/2, L]\ .$$

(c) • En laissant $\dfrac{5L}{8} < X_G = \dfrac{2L}{3} < \dfrac{3L}{4}$, et pour $x \in \bar{\Omega}_2 = [L/2, L]$, il vient alors

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2}\Big(5 - \frac{3x}{L}\Big)\Big(\frac{2x}{L} - 1\Big) \,, \\
\frac{d\,\vec{N}_2}{dx}(x) &= \frac{dy}{dx}(x) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{13L - 12x}{2L^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \,, \\
\frac{d\,\vec{N}_2}{dx}(x)\,\frac{d\,\vec{N}_2^{\,t}}{dx}(x) &= \left(\frac{13L - 12x}{2L^2}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

Nous pouvons limiter les erreurs d'approximation en utilisant alors une quadrature de SIMPSON qui soit définie sur $\bar{\Omega}_2$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_{L/2}^{L} k\,\frac{d\,\vec{N}_2}{dx}(x)\,\frac{d\,\vec{N}_2^{\,t}}{dx}(x)\,dx = \frac{19k}{8L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\vec{F}_2 &= \int_{L/2}^{L} [c_o - c_1 x]\,\vec{N}_2(x)\,dx + h\,\vec{N}_2(L) = \begin{bmatrix} \dfrac{-c_oL}{8} + \dfrac{13c_1L^2}{96} \\ \dfrac{5c_oL}{8} - \dfrac{49c_1L^2}{96} + h \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

• Le couple $(K_1, \vec{F}_1)$ et la table de connectivité de cette formulation d'éléments finis sont encore ceux de l'étude **2**. Ainsi, “ l'assemblage ” des résultats élémentaires dans l'énergie $J(T_2) = \vec{\tau}^{\,t}\left[\dfrac{1}{2}\,K\,\vec{\tau} - \vec{F}\right]$ s'effectue avec $\vec{\tau} = [\tau_{ng}]_{ng=1,2,3}$, et

$$K = \frac{k}{8L}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 16+0 & -16+0 & 0+0 \\ -16+0 & 16+19 & 0-19 \\ 0+0 & 0-19 & 0+19 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{array} = \frac{k}{8L}\begin{bmatrix} 16 & -16 & 0 \\ -16 & 35 & -19 \\ 0 & -19 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{array} \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{4} - \dfrac{c_1L^2}{24} \\ \dfrac{c_oL}{4} - \dfrac{c_1L^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-c_oL}{8} + \dfrac{13c_1L^2}{96} \\ \dfrac{5c_oL}{8} - \dfrac{49c_1L^2}{96} + h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{4} - \dfrac{c_1L^2}{24} \\ \dfrac{c_oL}{8} + \dfrac{5c_1L^2}{96} \\ \dfrac{5c_oL}{8} - \dfrac{49c_1L^2}{96} + h \end{bmatrix}$$

• La condition de stationnarité réduite, $\check{K}\check{\tau} = \check{\vec{F}}$, s'écrit alors avec

$$\check{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \,,\quad \check{K} = \frac{k}{8L}\begin{bmatrix} 35 & -19 \\ -19 & 19 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \check{\vec{F}} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{8} + \dfrac{5c_1L^2}{96} + \dfrac{2kT_o}{L} \\ \dfrac{5c_oL}{8} - \dfrac{49c_1L^2}{96} + h \end{bmatrix} .$$

Puisque $\check{K}^{-1} = \dfrac{L}{38k}\begin{bmatrix} 19 & 19 \\ 19 & 35 \end{bmatrix}$, alors $\check{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} T_o + \dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{3c_oL}{4} - \dfrac{11c_1L^2}{24} + h\right) \\ T_o + \dfrac{L}{38k}\left(\dfrac{97c_oL}{4} - \dfrac{135c_1L^2}{8} + 35h\right) \end{bmatrix}$.

• Nous en concluons alors que l'approximation $T_{2_{/\bar{\Omega}_e}}(x) = \vec{\vec{N}}_e^{\,t}(y(x))\,\vec{\tau}_e$ s'exprime maintenant comme

$$\begin{aligned}
T_{2_{/\Omega_1}}(x) &= T_o + \frac{y(x)L}{2k}\left(\frac{3c_oL}{4} - \frac{11c_1L^2}{24} + h\right) \\
T_{2_{/\Omega_2}}(x) &= T_o + \frac{L}{2k}\left[\left(\frac{3c_oL}{4} - \frac{11c_1L^2}{24} + h\right) + \frac{2y(x)}{19}\left(5c_oL - \frac{49c_1L^2}{12} + 8h\right)\right] \\
\text{avec } y(x) &= \left\{\begin{array}{cl} \dfrac{2x}{L} & , \ \forall x \in \bar{\Omega}_1 = [0, L/2] \\ \dfrac{1}{2}\Big(5 - \dfrac{3x}{L}\Big)\Big(\dfrac{2x}{L} - 1\Big) & , \ \forall x \in \bar{\Omega}_2 = [L/2, L] \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

• Le multiplicateur de LAGRANGE donne encore le même résultat, avec

$$\lambda_2(0) \ = \ F_1 - K_{1\,1}\,\tau_1 - K_{1\,2}\,\tau_2 - K_{1\,3}\,\tau_3 \ \equiv \ k\frac{dT_{ex}}{dx}(0) \ .$$

4. *Approximation avec $p = 3$ éléments et $n + 1 = 4$ noeuds .*

(a) Il est pratique de noter que les transformations géométriques isoparamétriques et leurs dérivées qui sont utilisées ici s'écrivent, avec les longueurs $L_e = X_{ng(e,m_e)} - X_{ng(e,0)}$ des éléments $\bar{\Omega}_e = \big[X_{ng(e,0)}\ , X_{ng(e,m_e)}\big]$, comme

$$x(y) \ = \ X_{ng(e,0)} + yL_e = \left\{\begin{array}{cl} \dfrac{L\,y}{2} & \in \ \bar{\Omega}_1 = [0, L/2] \\ \dfrac{L\,(2+y)}{4} & \in \ \bar{\Omega}_2 = [L/2, 3L/4] \\ \dfrac{L\,(3+y)}{4} & \in \ \bar{\Omega}_3 = [3L/4, L] \end{array}\right. \quad , \forall y \in \bar{\Omega}_r = [0,1]$$

$$\frac{dx}{dy}(x) \ = \ L_e \ = \ \left\{\begin{array}{cl} \dfrac{L}{2} & , \ \forall x \in \bar{\Omega}_1 \\ \dfrac{L}{4} & , \ \forall x \in \bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3 \end{array}\right. \quad , \text{ et } \forall y \in \bar{\Omega}_r \ .$$

Certaines valeurs élémentaires s'écrivent alors d'une manière simple, comme

$$\frac{d\vec{N}_e}{dx}(x) \ = \ \frac{d\,\vec{\tilde{N}}_e}{dy}(y)\,\frac{dy}{dx}(x) \ = \ \frac{1}{L_e}\,\frac{d\,\vec{\tilde{N}}_e}{dy}(y) \ = \ \frac{1}{L_e}\,\frac{d}{dy}\begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix} \ = \ \frac{1}{L_e}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \frac{1}{L_e}\int_0^1 k\,\frac{d\,\vec{\tilde{N}}_e}{dy}(y)\,\frac{d\,\vec{\tilde{N}}_e^{\,t}}{dy}(y)\,dy \ = \ \frac{k}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \ , \text{ pour } e = 1,2,3 \ ;$$

$$\vec{F}_1 \ = \ L_1\int_0^1 \Big[c_o - c_1\,y\,L_1\Big]\vec{\tilde{N}}_1(y)\,dy \ = \ L_1\begin{bmatrix} \dfrac{c_o}{2} - \dfrac{c_1L_1}{12} \\ \dfrac{c_o}{2} - \dfrac{c_1L_1}{6} \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{4} - \dfrac{c_1L^2}{24} \\ \dfrac{c_oL}{4} - \dfrac{c_1L^2}{12} \end{bmatrix} \ ;$$

$$\vec{F}_2 \ = \ L_2\int_0^1 \Big[c_o - c_1\,(2+y)\,L_2\Big]\vec{\tilde{N}}_2(y)\,dy \ = \ \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{8} - \dfrac{7c_1L^2}{96} \\ \dfrac{c_oL}{8} - \dfrac{c_1L^2}{12} \end{bmatrix} \ ;$$

$$\vec{F}_3 \ = \ L_3\int_0^1 \Big[c_o - c_1\,(3+y)\,L_3\Big]\vec{\tilde{N}}_3(y)\,dy \ + \ h\,\vec{\tilde{N}}_3(1) \ = \ \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{8} - \dfrac{5c_1L^2}{48} \\ \dfrac{c_oL}{8} - \dfrac{11c_1L^2}{96} + h \end{bmatrix} \ .$$

(b) La table de connectivité de cette formulation en éléments finis est telle que

$\mathbf{n_l}$ / $\mathbf{e}$	0	$m=1$
1	$n_g(1,0)=1$	$n_g(1,m)=2$
2	$n_g(2,0)=2$	$n_g(2,m)=3$
$p=3$	$n_g(p,0)=3$	$n_g(p,m)=4$

Par conséquent, l'énergie $J(T_3) = \vec{\tau}^{\,t} \left[\frac{1}{2}\, K\, \vec{\tau} - \vec{F}\right]$ s'exprime avec $\vec{\tau} = [\tau_{ng}]_{ng=1,2,3,4}$, et

$$K = \frac{2k}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1+0+0 & -1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ & 1+2+0 & 0-2+0 & 0+0+0 \\ & Sym & 0+2+2 & 0+0-2 \\ & & & 0+0+2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{array} = \frac{2k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{array} \begin{bmatrix} \frac{c_oL}{4} - \frac{c_1L^2}{24} \\ \frac{c_oL}{4} - \frac{c_1L^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_oL}{8} - \frac{7c_1L^2}{96} \\ \frac{c_oL}{8} - \frac{c_1L^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c_oL}{8} - \frac{5c_1L^2}{48} \\ \frac{c_oL}{8} - \frac{11c_1L^2}{96} + h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_oL}{4} - \frac{c_1L^2}{24} \\ \frac{3c_oL}{8} - \frac{5c_1L^2}{32} \\ \frac{c_oL}{4} - \frac{3c_1L^2}{16} \\ \frac{c_oL}{8} - \frac{11c_1L^2}{96} + h \end{bmatrix}$$

(c) • La condition de stationnarité réduite $\check{K}\check{\tau} = \check{\vec{F}}$ s'écrit alors avec

$$\check{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix}, \quad \check{K} = \frac{2k}{L} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \check{\vec{F}} = \begin{bmatrix} \frac{3c_oL}{8} - \frac{5c_1L^2}{32} + \frac{2kT_o}{L} \\ \frac{c_oL}{4} - \frac{3c_1L^2}{16} \\ \frac{c_oL}{8} - \frac{11c_1L^2}{96} + h \end{bmatrix}.$$

Nous trouvons ici que $\check{K}^{-1} = \frac{L}{4k} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, et donc

$$\check{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} T_o + \frac{L}{2k}\left(\frac{3c_oL}{4} - \frac{11c_1L^2}{24} + h\right) \\ T_o + \frac{3L}{4k}\left(\frac{5c_oL}{8} - \frac{13c_1L^2}{32} + h\right) \\ T_o + \frac{L}{k}\left(\frac{c_oL}{2} - \frac{c_1L^2}{3} + h\right) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_{ex}(L/2) \\ T_{ex}(3L/4) \\ T_{ex}(L) \end{bmatrix}.$$

• L'approximation T_3 apparait finalement telle que

$$\begin{array}{rcl} T_{3_{/\Omega_e}}(x) & = & \tilde{\vec{N}}_e^{\,t}(y(x))\,\vec{\tau}_e \;=\; T_{ex}(X_{n_g(e,0)}) + \left[T_{ex}(X_{n_g(e,m_e)}) - T_{ex}(X_{n_g(e,0)})\right] y(x) \\ \text{avec} \quad y(x) & = & \dfrac{x - X_{n_g(e,0)}}{L_e} \quad , \quad \forall x \in \bar{\Omega}_e = \left[X_{n_g(e,0)}, X_{n_g(e,m_e)}\right] \text{ (pour } e = 1,2,3) \ . \end{array}$$

• La méthode des multiplicateurs de LAGRANGE donne encore le résultat exact, car

$$\lambda_2(0) \;=\; F_1 - K_{1\,1}\,\tau_1 - K_{1\,2}\,\tau_2 - K_{1\,3}\,\tau_3 - K_{1\,4}\,\tau_4 \;\equiv\; k\frac{dT_{ex}}{dx}(0) \ .$$

5. <u>*Approximation avec $p = 2$ éléments et $n + 1 = 4$ noeuds .*</u>

(a) Les transformations géométriques et leurs dérivées s'écrivent à nouveau simplement comme

$$\begin{array}{rcl} x(y) & = & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{L\,y}{2} & \in \quad \bar{\Omega}_1 = [0, L/2] \\ \dfrac{L\,(1+y)}{2} & \in \quad \bar{\Omega}_2 = [L/2, L] \end{array} \right. \quad , \forall y \in \bar{\Omega}_r = [0,1] \\ \dfrac{dx}{dy}(x) & = & \dfrac{L}{2} \quad \forall x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \text{ et } \forall y \in \bar{\Omega}_r \ . \end{array}$$

Les résultats obtenus dans la partie **2.** sur $\bar{\Omega}_1$ restent les mêmes tandis que ceux sur $\bar{\Omega}_2$ deviennent

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d\vec{N}_2}{dx}(x) & = & \dfrac{d\,\tilde{\vec{N}}_2}{dy}(y)\,\dfrac{dy}{dx}(x) \;=\; \dfrac{2}{L}\,\dfrac{d}{dy}\begin{bmatrix} (1-2y)(1-y) \\ 4y(1-y) \\ y(2y-1) \end{bmatrix} \;=\; \dfrac{2}{L}\begin{bmatrix} 4y-3 \\ 4(1-2y) \\ 4y-1 \end{bmatrix} \\ K_2 & = & \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^1 k\,\dfrac{d\,\tilde{\vec{N}}_2}{dy}(y)\,\dfrac{d\,\tilde{\vec{N}}_2^{\,t}}{dy}(y)\,dy \;=\; \dfrac{2k}{3L}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \ ; \\ \vec{F}_2 & = & \dfrac{L}{2}\displaystyle\int_0^1 \left[c_o - \dfrac{c_1\,(1+y)\,L}{2}\right]\tilde{\vec{N}}_2(y)\,dy \;+\; h\,\tilde{\vec{N}}_2(1) \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{12} - \dfrac{c_1L^2}{24} \\ \dfrac{c_oL}{3} - \dfrac{c_1L^2}{4} \\ \dfrac{c_oL}{12} - \dfrac{c_1L^2}{12} + h \end{bmatrix} \ . \end{array}$$

(b) La table de connectivité s'exprime ici comme

e \ $\mathbf{n_l}$	0	1	$m = 2$
1	$n_g(1,0) = 1$	$n_g(1,1) = 2$	
$p = 2$	$n_g(p,0) = 2$	$n_g(p,1) = 3$	$n_g(p,m) = 4$

et l'énergie s'écrit ainsi selon $J(T_3) = \vec{\tau}^{\,t}\left[\dfrac{1}{2}\,K\,\vec{\tau} - \vec{F}\right]$, avec $\vec{\tau} = [\tau_{ng}]_{ng=1,2,3}$, et

$$K \;=\; \frac{2k}{3L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 3+0 & -3+0 & 0+0 & 0+0 \\ & 3+7 & 0-8 & 0+1 \\ & Sym & 0+16 & 0-8 \\ & & & 0+7 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{array} \;=\; \frac{2k}{3L}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -8 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} \;=\; \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{array}\begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{4} - \dfrac{c_1L^2}{24} \\ \dfrac{c_oL}{4} - \dfrac{c_1L^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{c_oL}{12} - \dfrac{c_1L^2}{24} \\ \dfrac{c_oL}{3} - \dfrac{c_1L^2}{4} \\ \dfrac{c_oL}{12} - \dfrac{c_1L^2}{12} + h \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{4} - \dfrac{c_1L^2}{24} \\ \dfrac{c_oL}{3} - \dfrac{c_1L^2}{8} \\ \dfrac{c_oL}{3} - \dfrac{c_1L^2}{4} \\ \dfrac{c_oL}{12} - \dfrac{c_1L^2}{12} + h \end{bmatrix}$$

(c) • Notre condition de stationnarité $\check{K}\check{\tau} = \vec{\check{F}}$ fait intervenir maintenant

$$\vec{\check{\tau}} \;=\; \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} \quad , \quad \check{K} \;=\; \frac{2k}{3L}\begin{bmatrix} 10 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\check{F}} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{c_oL}{3} - \dfrac{c_1L^2}{8} + \dfrac{2kT_o}{k} \\ \dfrac{c_oL}{3} - \dfrac{c_1L^2}{4} \\ \dfrac{c_oL}{12} - \dfrac{c_1L^2}{12} + h \end{bmatrix}.$$

En utilisant la matrice $\check{K}^{-1} \;=\; \dfrac{L}{32k}\begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 16 & 23 & 24 \\ 16 & 24 & 32 \end{bmatrix}$, il vient alors

$$\vec{\check{\tau}} = \check{K}^{-1}\vec{\check{F}} = \begin{bmatrix} T_o + \dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{3c_oL}{4} - \dfrac{11c_1L^2}{24} + h\right) \\ T_o + \dfrac{3L}{4k}\left(\dfrac{5c_oL}{8} - \dfrac{13c_1L^2}{32} + h\right) \\ T_o + \dfrac{L}{k}\left(\dfrac{c_oL}{2} - \dfrac{c_1L^2}{3} + h\right) \end{bmatrix} \;\equiv\; \begin{bmatrix} T_{ex}(L/2) \\ T_{ex}(3L/4) \\ T_{ex}(L) \end{bmatrix}.$$

• En considérant $T3_{/\bar{\Omega}_e} = \vec{\check{N}}_e^{\,t}(y(x))\,\vec{\tau}_e$, nous avons alors

$$\begin{aligned} T3_{/\Omega_1}(x) &= T_{ex}(0) + \Big[T_{ex}(L/2) - T_{ex}(0)\Big]\,y(x) \\ T3_{/\Omega_2}(x) &= T_{ex}(L/2) + y(x)\Big\{\,T_{ex}(L) - T_{ex}(L/2) \\ &\qquad + 2\big[1-y(x)\big]\big[2T_{ex}(3L/4) - T_{ex}(L) - T_{ex}(L/2)\big]\,\Big\} \end{aligned}$$

$$\text{avec}\quad y(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{L} & , \quad \forall x \in \bar{\Omega}_1 = [0, L/2] \\ \dfrac{2x}{L} - 1 & , \quad \forall x \in \bar{\Omega}_2 = [L/2, L] \end{cases}.$$

• La méthode des multiplicateurs de Lagrange donne encore le résultat exact, car

$$\lambda_2(0) \;=\; F_1 - K_{1\,1}\,\tau_1 - K_{1\,2}\,\tau_2 - K_{1\,3}\,\tau_3 - K_{1\,4}\,\tau_4 \;\equiv\; k\frac{dT_{ex}}{dx}(0)$$

Problème 2 : Plaque élastique chargée perpendiculairement à son plan moyen de repos.

1. L'énergie totale se décompose selon $\quad J_1(u_5) \;=\; \sum_{e=1}^{6} J(u_{5/\bar{\Omega}_e}) \;=\; \sum_{e=1}^{6} \vec{\tau}_e^{\,t} \left[\frac{1}{2}\, K_e\, \vec{\tau}_e - \vec{F}_e\right]$
avec les grandeurs élémentaires

$$\begin{aligned} K_e &= \int_{\Omega_e} \mu \left[\vec{\nabla}\vec{N}_e^{\,t}(x)\right]^t \left[\vec{\nabla}\vec{N}_e^{\,t}(x)\right] d\Omega \\ \vec{F}_e &= \int_{\Omega_e} \frac{c}{L}\left(1-\frac{x_1}{L}\right)\vec{N}_e(x)\, d\Omega - \int_{(\Gamma\setminus\Gamma_1)\cap\bar{\Omega}_e} \frac{c\, x_2^2}{2L\ell(x)}\, \vec{N}_e(x)\, d\Gamma \end{aligned}$$

2. **• Calculs sur l'élément rectangulaire $\bar{\Omega}_1$**

Les fonctions de forme sont sur cet élément : $\vec{N}_1(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1-\frac{2x_1}{L}\right)\left(1-\frac{2x_2}{L}\right) \\ \frac{2x_1}{L}\left(1-\frac{2x_2}{L}\right) \\ \frac{4\,x_1\,x_2}{L^2} \\ \left(1-\frac{2x_1}{L}\right)\frac{2x_2}{L} \end{bmatrix}.$

La matrice de rigidité $K_1 = \int_0^{L/2}\int_0^{L/2} \mu \left[\vec{\nabla}\vec{N}_1^{\,t}(x)\right]^t \left[\vec{\nabla}\vec{N}_1^{\,t}(x)\right] dx_2\, dx_1$ s'obtient en calculant

$$\vec{\nabla}\vec{N}_1^{\,t}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} \frac{2x_2}{L}-1 & 1-\frac{2x_2}{L} & \frac{2x_2}{L} & \frac{-2x_2}{L} \\ \frac{2x_1}{L}-1 & \frac{-2x_1}{L} & \frac{2x_1}{L} & 1-\frac{2x_1}{L} \end{bmatrix}$$

Les quadratures proposées suffisent pour obtenir les résultats d'intégration de ces dernières sur $\bar{\Omega}_1$, et il vient :

$$K_1 = \frac{\mu}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{array} .$$

Quant au vecteur des sollicitations extérieures qui, en accord avec le sens de $d\vec{\Gamma}$ sur $\Gamma_3 \cap \bar{\Omega}_1$, s'exprime comme

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \int_{\Omega_1} \frac{c}{L}\left(1-\frac{x_1}{L}\right)\vec{N}_1(x)\, d\Omega - \int_{\Gamma_3\cap\bar{\Omega}_1} \frac{c\, x_2^2}{2L^2}\, \vec{N}_1(x)\, d\Gamma \\ &= \int_0^{L/2}\int_0^{L/2} \frac{c}{L}\left(1-\frac{x_1}{L}\right)\vec{N}_1(x)\, dx_2\, dx_1 - \int_{\underline{\underline{L/2}}}^{0} \frac{c\, x_2^2}{2L^2}\, \vec{N}_1(0,x_2)\, dx_2 \end{aligned}$$

il vaut numériquement : $\quad \vec{F}_1 = \frac{c\,L}{96}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{array} .$

• Calculs sur les éléments triangulaires $\bar\Omega_2$ et $\bar\Omega_3$

Les deux transformations géométriques $\bar\Omega_r \to \bar\Omega_e \times \mathbb{R}$ laissent $x_3(y) \equiv 0$ et donnent

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}(y) &= \vec{\vec{N}}^{\,t}(y) \begin{bmatrix} \vec{X}_{12} & \vec{X}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y_1-y_2 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\,2} & X_{2\,2} \\ X_{1\,5} & X_{2\,5} \\ X_{1\,3} & X_{2\,3} \end{bmatrix} \\
&= \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1+y_1 & y_2 \end{bmatrix} \quad , \text{ dans } \Omega_2 \\
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}(y) &= \vec{\vec{N}}^{\,t}(y) \begin{bmatrix} \vec{X}_{13} & \vec{X}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y_1-y_2 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\,4} & X_{2\,4} \\ X_{1\,3} & X_{2\,3} \\ X_{1\,6} & X_{2\,6} \end{bmatrix} \\
&= \frac{L}{2} \begin{bmatrix} y_1 & 1+y_2 \end{bmatrix} \quad , \text{ dans } \Omega_3
\end{aligned}$$

En particulier, et en respectant le sens de parcourt $d\vec{\Gamma}$, on décrit les portions de bord $\Gamma_2 \cap \bar\Omega_2$ et $\Gamma_2 \cap \bar\Omega_3$ avec $y = (1-y_2, y_2)$ et $y_2 \in [0,1]$ (ou bien $y = (y_1, 1-y_1)$ et $y_1 \in [0,1]$), et la portion de bord $\Gamma_3 \cap \bar\Omega_3$ avec $y = (0, 1-y_2)$ et $y_2 \in [0,1]$; nous avons alors:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}(1-y_2, y_2) &= \vec{\vec{N}}^{\,t}(1-y_2, y_2) \begin{bmatrix} \vec{X}_{12} & \vec{X}_{22} \end{bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 2-y_2 & y_2 \end{bmatrix} \text{ , sur } \Gamma_2 \cap \Omega_2 \\
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}(1-y_2, y_2) &= \vec{\vec{N}}^{\,t}(1-y_2, y_2) \begin{bmatrix} \vec{X}_{13} & \vec{X}_{23} \end{bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1-y_2 & 1+y_2 \end{bmatrix} \text{ , sur } \Gamma_2 \cap \Omega_3 \\
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}(0, 1-y_2) &= \vec{\vec{N}}^{\,t}(0, 1-y_2) \begin{bmatrix} \vec{X}_{13} & \vec{X}_{23} \end{bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2-y_2 \end{bmatrix} \text{ , sur } \Gamma_3 \cap \Omega_3
\end{aligned}$$

L'utilisation de ces transformations entraîne la reformulation des matrices de rigidité

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_{L/2}^{L} \int_0^{L-x_1} \mu \left[\vec{\nabla} \vec{N}_2^t(x)\right]^t \left[\vec{\nabla} \vec{N}_2^t(x)\right] dx_2\, dx_1 \\
K_3 &= \int_0^{L/2} \int_{L/2}^{L-x_1} \mu \left[\vec{\nabla} \vec{N}_3^t(x)\right]^t \left[\vec{\nabla} \vec{N}_3^t(x)\right] dx_2\, dx_1
\end{aligned}$$

en $K_e = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-y_1} \mu \left[\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]^{-1} \vec{\vec{\nabla}} \vec{\vec{N}}^{\,t}(y)\right]^t \left[\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]^{-1} \vec{\vec{\nabla}} \vec{\vec{N}}^{\,t}(y)\right] \left|\det\left(\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]\right)\right| dy_2\, dy_1,$ pour $e = 2, 3$.

Les termes qui sont intégrés dans ces formules sont constants et égaux car ils sont formés avec

$$\vec{\vec{\nabla}} \vec{\vec{N}}^{\,t}(y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-y_1-y_2 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et la matrice jacobienne

$$\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right] = \vec{\vec{\nabla}} \begin{bmatrix} x_1(y) & x_2(y) \end{bmatrix} = \vec{\vec{\nabla}} \vec{\vec{N}}^{\,t}(y) \begin{bmatrix} \vec{X}_{1e} & \vec{X}_{2e} \end{bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ , pour } e = 2, 3$$

qui donne : $\quad \det\left(\left[\dfrac{\partial x}{\partial y}\right]\right) = 2 \times (\text{Aire de } \bar\Omega_e) = \dfrac{L^2}{4}, \quad$ et $\quad \left[\dfrac{\partial x}{\partial y}\right]^{-1} = \dfrac{2}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On peut ainsi écrire

$$K_e = (\text{Aire de } \bar\Omega_r) \times \mu \left[\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]^{-1} \vec{\vec{\nabla}} \vec{\vec{N}}^{\,t}(y)\right]^t \left[\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]^{-1} \vec{\vec{\nabla}} \vec{\vec{N}}^{\,t}(y)\right] \left|\det\left(\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]\right)\right|$$

et conclure que $K_2 = \frac{\mu}{2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \tau_2 & \tau_5 & \tau_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \tau_2 \\ \tau_5 \\ \tau_3 \end{array} \equiv K_3 = \frac{\mu}{2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \tau_4 & \tau_3 & \tau_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \tau_4 \\ \tau_3 \\ \tau_6 \end{array}$.

Les vecteurs des sollicitations extérieures sont initialement tels que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_2 &= \int_{\Omega_2} \frac{c}{L}\left(1-\frac{x_1}{L}\right) \vec{N}_2(x)\, d\Omega - \int_{\Gamma_2\cap\bar{\Omega}_2} \frac{c\, x_2^2}{2\sqrt{2}L^2}\, \vec{N}_2(x)\, d\Gamma \\
&= \int_{L/2}^{L}\int_0^{L-x_1} \frac{c}{L}\left(1-\frac{x_1}{L}\right) \vec{N}_2(x)\, dx_2\, dx_1 - \int_0^{L/2} \frac{c\, x_2^2}{2\sqrt{2}\, L^2}\, \vec{N}_2(L/2-x_2,x_2)\sqrt{1+\frac{dx_1}{dx_2}(x_2)}\, dx_2 \\
\vec{F}_3 &= \int_{\Omega_3} \frac{c}{L}\left(1-\frac{x_1}{L}\right) \vec{N}_3(x)\, d\Omega - \int_{\Gamma_2\cap\bar{\Omega}_3} \frac{c\, x_2^2}{2\sqrt{2}L^2}\, \vec{N}_3(x)\, d\Gamma - \int_{\Gamma_3\cap\bar{\Omega}_3} \frac{c\, x_2^2}{2L^2}\, \vec{N}_3(x)\, d\Gamma \\
&= \int_0^{L/2}\int_{L/2}^{L-x_1} \frac{c}{L}\left(1-\frac{x_1}{L}\right) \vec{N}_3(x)\, dx_2\, dx_1 - \int_{L/2}^{L} \frac{c\, x_2^2}{2\sqrt{2}\, L^2}\, \vec{N}_2(L-x_2,x_2)\sqrt{1+\frac{dx_1}{dx_2}(x_2)}\, dx_2 \\
&\quad - \int_L^{L/2} \frac{c\, x_2^2}{2L^2}\, \vec{N}_2(0,x_2)\, dx_2
\end{aligned}$$

selon le sens de $d\vec{\Gamma}$ sur $\Gamma_2 \cap \bar{\Omega}_2$, $\Gamma_2 \cap \bar{\Omega}_3$, et $\Gamma_3 \cap \bar{\Omega}_3$. Ils se reformulent comme

$$\begin{aligned}
\vec{F}_2 &= \int_0^1\int_0^{1-y_1} \frac{c}{L}\left[1-\frac{\vec{\tilde{N}}^t(y)\,\vec{X}_{12}}{L}\right] \vec{\tilde{N}}(y)\left|\det\left(\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]\right)\right| dy_2\, dy_1 \\
&\quad - \int_0^1 \frac{c\left[\vec{\tilde{N}}^t(1-y_2,y_2)\,\vec{X}_{22}\right]^2}{2\sqrt{2}L^2}\, \vec{\tilde{N}}(1-y_2,y_2)\left\|\frac{d}{dy_2}\left[\vec{\tilde{N}}^t(1-y_2,y_2)\,\vec{X}_{i2}\right]_{i=1,2}\right\| dy_2\ ; \\
\vec{F}_3 &= \int_0^1\int_0^{1-y_1} \frac{c}{L}\left[1-\frac{\vec{\tilde{N}}^t(y)\,\vec{X}_{13}}{L}\right] \vec{\tilde{N}}(y)\left|\det\left(\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]\right)\right| dy_2\, dy_1 \\
&\quad - \int_0^1 \frac{c\left[\vec{\tilde{N}}^t(1-y_2,y_2)\,\vec{X}_{23}\right]^2}{2\sqrt{2}L^2}\, \vec{\tilde{N}}(1-y_2,y_2)\left\|\frac{d}{dy_2}\left[\vec{\tilde{N}}^t(1-y_2,y_2)\,\vec{X}_{i3}\right]_{i=1,2}\right\| dy_2 \\
&\quad - \int_1^0 \frac{c\left[\vec{\tilde{N}}^t(0,y_2)\,\vec{X}_{23}\right]^2}{2L^2}\, \vec{\tilde{N}}(0,y_2)\left\|\frac{d}{dy_2}\left[\vec{\tilde{N}}^t(0,y_2)\,\vec{X}_{i3}\right]_{i=1,2}\right\| dy_2\ .
\end{aligned}$$

Nous pouvons simplifions ces expressions en tenant compte de nos précédents calculs et de

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d}{dy_2}\left[\vec{\tilde{N}}^t(1-y_2,y_2)\,\vec{X}_{ie}\right]_{i=1,2}\right\| &= \left\|\frac{L}{2}\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right]\right\| = \frac{L}{\sqrt{2}} \\
\left\|\frac{d}{dy_2}\left[\vec{\tilde{N}}^t(0,y_2)\,\vec{X}_{i3}\right]_{i=1,2}\right\| &= \left\|\frac{L}{2}\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]\right\| = \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

(les dérivations s'effectuant en dernier). Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
\vec{F}_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-y_1} \frac{c\,L(1-y_1)}{8}\,\vec{\tilde{N}}(y)\,dy_2\,dy_1 - \int_0^1 \frac{c\,L\,y_2^2}{16}\,\vec{\tilde{N}}(1-y_2,y_2)\,dy_2\ ;\\
\vec{F}_3 &= \int_0^1 \int_0^{1-y_1} \frac{c\,L(2-y_1)}{8}\,\vec{\tilde{N}}(y)\,dy_2\,dy_1\\
&\quad - \int_0^1 \frac{c\,L}{16}\left[(1+y_2)^2\vec{\tilde{N}}(1-y_2,y_2)+(2-y_2)^2\vec{\tilde{N}}(0,1-y_2)\right]dy_2\ .
\end{aligned}$$

et finalement, en utilisant les quadratures,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_2 &= \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix} - \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix} = \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}\tau_2\\\tau_5\\\tau_3\end{matrix}\ ;\\
\vec{F}_3 &= \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix}7\\6\\7\end{bmatrix} - \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix}0+11\\11+0\\17+17\end{bmatrix} = \frac{-c\,L}{192}\begin{bmatrix}4\\5\\27\end{bmatrix}\begin{matrix}\tau_4\\\tau_3\\\tau_6\end{matrix}\ .
\end{aligned}$$

3. L'assemblage donne alors $J_1(u_5) = \vec{\tau}^{\,t}\left[\frac{1}{2}\,K\,\vec{\tau} - \vec{F}\right]$, avec $\vec{\tau} = [\tau_j]_{i=1,\ldots,6}$,

$$K = \left[K_{ij}\right]_{i,j=1,\ldots,6} = \frac{\mu}{6}\begin{array}{c}\begin{matrix}\tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}4 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0\\ & 10 & -4 & -2 & -3 & 0\\ & & 10 & -4 & 0 & 0\\ & sym & & 10 & 0 & -3\\ & & & & 3 & 0\\ & & & & & 3\end{bmatrix}\begin{matrix}\tau_1\\\tau_2\\\tau_3\\\tau_4\\\tau_5\\\tau_6\end{matrix}\end{array} \quad \text{et} \quad \vec{F} = [F_i]_{i=1,\ldots,6} = \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix}9\\11\\3\\3\\1\\-27\end{bmatrix}\begin{matrix}\tau_1\\\tau_2\\\tau_3\\\tau_4\\\tau_5\\\tau_6\end{matrix}\ .$$

4. Sur les portions de bord $\left(\Gamma_1 \cap \bar{\Omega}_1\right)$ et $\left(\Gamma_1 \cap \bar{\Omega}_2\right)$ qui se décrivent avec $y = (y_1, 0)$ et $y_1 \in [0,1]$, nous imposons la condition cinématique $u_{5/\Gamma_1}(x) = U \Leftrightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_5 = U$. Il nous reste à déterminer les autres composantes de $\vec{\tau}$ en utilisant la condition de stationnarité (réduite)

$$\check{K}\vec{\check{\tau}} = \vec{\check{F}} \quad , \text{ avec } \vec{\check{\tau}} = \begin{bmatrix}\tau_3\\\tau_4\\\tau_6\end{bmatrix} \ , \ \check{K} = \frac{\mu}{6}\begin{array}{c}\begin{matrix}\tau_3 & \tau_4 & \tau_6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}10 & -4 & 0\\ -4 & 10 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{matrix}\tau_3\\\tau_4\\\tau_6\end{matrix}\end{array} \ \text{et } \vec{\check{F}} = \begin{bmatrix}\frac{c\,L}{64} + \mu\,U\\ \frac{c\,L}{64} + \frac{\mu\,U}{2}\\ \frac{-9\,c\,L}{64}\end{bmatrix}\begin{matrix}\tau_3\\\tau_4\\\tau_6\end{matrix}\ .$$

Comme $\check{K}^{-1} = \frac{1}{9\mu}\begin{bmatrix}7 & 4 & 4\\4 & 10 & 10\\4 & 10 & 28\end{bmatrix}$, on déduit alors $\vec{\check{\tau}} = \check{K}^{-1}\vec{\check{F}} = \begin{bmatrix}U - \frac{25\,c\,L}{576\mu}\\ U - \frac{19\,c\,L}{144\mu}\\ U - \frac{119\,c\,L}{288\mu}\end{bmatrix}$.

Nous savons que $\{u_5(A_i)\}_{i=1,\dots,6} = \{\tau_i\}_{i=1,\dots,6}$ et constatons les inégalités suivantes aux 3 noeuds qui ne sont pas sur Γ_1 (comme $c, \mu \geq 0$) :

$$\begin{array}{llcl}
\text{en } A_3 : & u_5(L/2, L/2) = U - \dfrac{25\,c\,L}{576\mu} & > & u_{ex}(L/2, L/2) = U - \dfrac{c\,L}{16\mu} \\
\text{en } A_4 : & u_5(0, L/2) = U - \dfrac{19\,c\,L}{144\mu} & < & u_{ex}(0, L/2) = U - \dfrac{c\,L}{8\mu} \\
\text{en } A_6 : & u_5(0, L) = U - \dfrac{119\,c\,L}{288\mu} & > & u_{ex}(0, L) = U - \dfrac{c\,L}{2\mu}
\end{array}$$

Nous trouvons pour le déplacement du barycentre de la plaque

$$\begin{aligned}
u_{5/\bar{\Omega}_1}(L/3, L/3) \;&=\; \vec{N}_1^t(L/3, L/3)\,\vec{\tau}_1 \;=\; \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} U \\ U \\ U - \dfrac{25\,c\,L}{576\mu} \\ U - \dfrac{19\,c\,L}{144\mu} \end{bmatrix} \text{(car } \vec{\tau}_1 = \big[\tau_i\big]_{i=1,2,3,4}\text{)} \\
&=\; U - \frac{7\,c\,L}{144\mu} < \; u_{ex}(L/3, L/3) \;=\; U - \frac{cL}{27\mu}\;.
\end{aligned}$$

5. Nous calculons les valeurs des multiplicateurs de Lagrange d'approximation aux 3 noeuds $\{A_i\}_{i=1,2,5} \subset \Gamma_1$ en effectuant $\big[\lambda_3(A_i)\big]_{i=1,2,5} = \big[F_i\big]_{i=1,2,5} - \big[K_{ij}\big]_{\substack{i=1,2,5 \\ j=1,\dots,6}}\;\vec{\tau}$ et trouvons ainsi

$$\begin{bmatrix} \lambda_3(A_1) \\ \lambda_3(A_2) \\ \lambda_3(A_3) \end{bmatrix} = \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\mu}{6}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & -4 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ U \\ U - \dfrac{25\,c\,L}{576\mu} \\ U - \dfrac{19\,c\,L}{144\mu} \\ U \\ U - \dfrac{119\,c\,L}{288\mu} \end{bmatrix} = \frac{c\,L}{192}\begin{bmatrix} -38 \\ -45 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie alors que l'obtient de moins bonnes estimations des forces de réactions

$$\mu\,L\,\frac{\partial u_{ex}}{\partial n}(x_1, 0^+) = -\mu\,L\,\frac{\partial u_{ex}}{\partial x_2}(x_1, 0^+) \;=\; 0\;,\;\forall x_1 \in]0, L[$$

avec les valeurs limites des flux

$$\begin{aligned}
\mu\,L\,\frac{\partial u_{5/\bar{\Omega}_1}}{\partial n}(x_1, 0^+) \;&=\; -\mu\,L\,\frac{\partial u_{5/\bar{\Omega}_1}}{\partial x_2}(x_1, 0^+) \;=\; \begin{cases} \dfrac{19c\,L}{72} & ,\quad \text{si } x_1 = 0^+ \\ \dfrac{25c\,L}{288} & ,\quad \text{si } x_1 = \dfrac{L}{2}^- \end{cases} \\
\mu\,L\,\frac{\partial u_{5/\bar{\Omega}_2}}{\partial n}(x_1, 0^+) \;&=\; \mu\,L\left[\vec{n}^{\,t}(x)\Big[\frac{\partial x}{\partial y}\Big]^{-1}\vec{\tilde{\nabla}}\vec{\tilde{N}}^{\,t}\big(y(x)\big)\right]\vec{\tau}_2 \;=\; \frac{25\,c\,L}{288},\;\forall x_1 \in]L/2, L[
\end{aligned}$$