Ecoulement visqueux stationnaire

On s'interesse à un écoulement de fluide dans une conduite cylindrique de longueur L. Le fluide sera considéré visqueux et incompressible. La résolution de ce problème classique de mécanique des fluides (écoulement de Poiseuille) nous permet de nous poser les hypothèses suivantes :

- la pression dans la section d'entrée vaut p_1, et en sortie p_2 (avec $p_1 > p_2$)
- il y a une chute linéaire de pression R telle que $-R = \frac{p_2 - p_1}{L}$ avec $R > 0$
- la vitesse dans le tuyau est de la forme $\overrightarrow{u} = (0, 0, u_3(x, y))$

L'équation de Navier Stockes nous donne $\overrightarrow{grad(p)} = \mu\Delta(\overrightarrow{u})$. De plus, il y a adhérence aux parois.

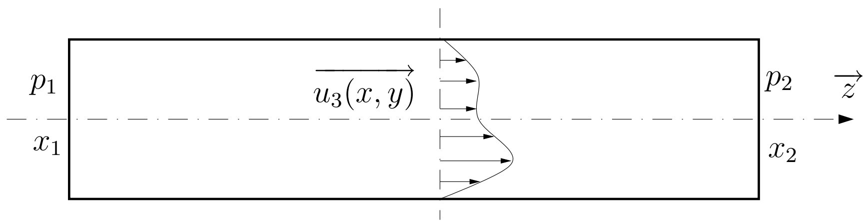

Figure 1 – Ecoulement en conduite cylindrique

1 Ecrire le problème mécanique (dans un repère cartésien en remarquent la symétrie axiale)
2 Etablir la formulation inégrale forte du problème. On note $P(x)$ et $P\bar{(}x)$ les fonctions de projection sur le domaine et auxlimites.
3 En déduire la formulation intégrale faible de ce problème. Proposer des relations entre $P(x)$ et $P\bar{(}x)$ qui simplifient la formulation.
4 L'approximation recherchée est de la forme

$$u_3(x) = \sum_{i=0}^{N} q_i \Phi_i(x)$$

La méthode de Galerkin est appliquée à la formulation faible. Exprimer les terme général de la matrice de raideur $\underline{\underline{K}}$ et du vecteur des forces généralisées $\overrightarrow{F}$.
5 Proposer des fonctions de polynomiales formant une base de l'espace des polynomes de degrès 2 admissible pour le problème posé.
6 Construire la solution approchée, et la comparer avec la solution exacte.

TD 2
Méthode des éléments finis

pb 1 : Electrostatique (suite) : méthode de Galerkin
pb 2 : Flexion d'une poutre : méthode de Ritz

Electrostatique (Galerkin + éléments finis)

On s'interesse au problème du TD 1. Il faut trouver le potentiel électrique $V(x)$ correspondant à la formulation intégrale simplifiée par la méthode de Galerkin

$$\int_0^l \varepsilon(x)\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j(x)}{\partial x}dx - \int_0^l \rho(x)\Phi_j(x)dx + D_0\Phi_j(L) = 0$$

avec $V(x) = \sum_i q_i\Phi_i(x)$.

Nous allons choisir des fonctions de base de type éléments finis linéaire. Nous obtiendrons une approximation de $V(x)$ par une fonction $V_{elt}(x)$ linéaire par morceaux sur le domaine $[0, L]$.

On discrétise le domaine étudié en 2 éléments, donc trois noeuds.

1 Construire un élément fini linéaire en choisissant des fonctions de base appropriées. Ecrire la matrice de raideur élémentaire $\underline{\underline{K_e}}$.
2 Dans le cas de charges concentrées, écrire le vecteur des forces généralisées $\underline{F_c}$.
3 Dans le cas de charges réparties linéaires, déterminer le vecteur des forces généralisées élémentaires ($\underline{F_{x_e}}$), puis global ($\underline{F_x}$). On posera $f(x) = \sum_i f_i\Phi_i(x)$ pour discrétiser cet effort réparti.
4 Ecrire la matrice de raideur globale et le vecteur des forces généralisées $\underline{\underline{K}}$ et $\underline{F}$.
5 En appliquant les conditions aux limites sur $V(x)$, déduire la formulation matricielle du problème global.
6 Résoudre le système linéaire, et comparer la solution éléments finis avec les solutions exactes et par approximation polynomiale.
7 Comment pourrait on facilement obtenir une solution approchée de meilleure qualité ?

Flexion (Ritz + éléments finis)

On considère un problème de poutre encastrée en flexion. Il faut trouver la déformée $v(x)$ correspondant au problème local

$$\text{sur } [0,L] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} + p(x) = 0 \\ \frac{\partial M_f}{\partial x} + T(x) = 0 \\ M_f(x) = EI\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad \text{et sur le bord} \left\{ \begin{array}{l} T(L) = F \\ M_f(L) = M \\ v(0) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Le problème, formulé en fonction de $v(x)$ et avec $p = 0$, devient

$$\text{sur } [0,L] \quad EI\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = F(L-x) \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Nous allons nous intéresser à une troisième formulation, de type énergétique, pour faire apparaitre une fonctionnelle. Nous allons rechercher $v(x)$ tel que v est le minimum de l'énergie potentielle E_p associée au problème.

$$E_p(v) = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\right)^2 dx - Fv(L) - M\frac{\partial v}{\partial x}(L)$$

1 Déterminez la forme matricielle du problème de minimisation en appliquant la méthode de Ritz avec $v(x) = \sum_i q_i \Phi_i(x)$.

2 On choisit les fonctions de base telles que

$$v(x) = v_1\Phi_1(x) + w_1\Psi_1(x) + v_2\Phi_2(x) + w_2\Psi_2(x) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ \Psi_1(x) = x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ \Phi_2(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2\left(3 - 2\frac{x}{l}\right) \\ \Psi_2(x) = l\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(\frac{x}{l} - 1\right) \end{array} \right.$$

Ecrire la matrice de raideur élémentaire $\underline{\underline{K_e}}$.

3 Dans le cas de charges concentrées, écrire le vecteur des forces généralisées $\underline{F_e}$.

4 Decrire la méthode d'assemblage de la matrice de raideur globale et du vecteur des forces généralisées ($\underline{\underline{K}}$ et $\underline{F}$).

5 Application 1 : poutre encastrée à 1 élément
Traduire les conditions aux limites et écrire le problème matriciel global. Résoudre.

6 Application 2 : poutre bi-encastrée à 2 éléments
Traduire les conditions aux limites et écrire le problème matriciel global. Résoudre.

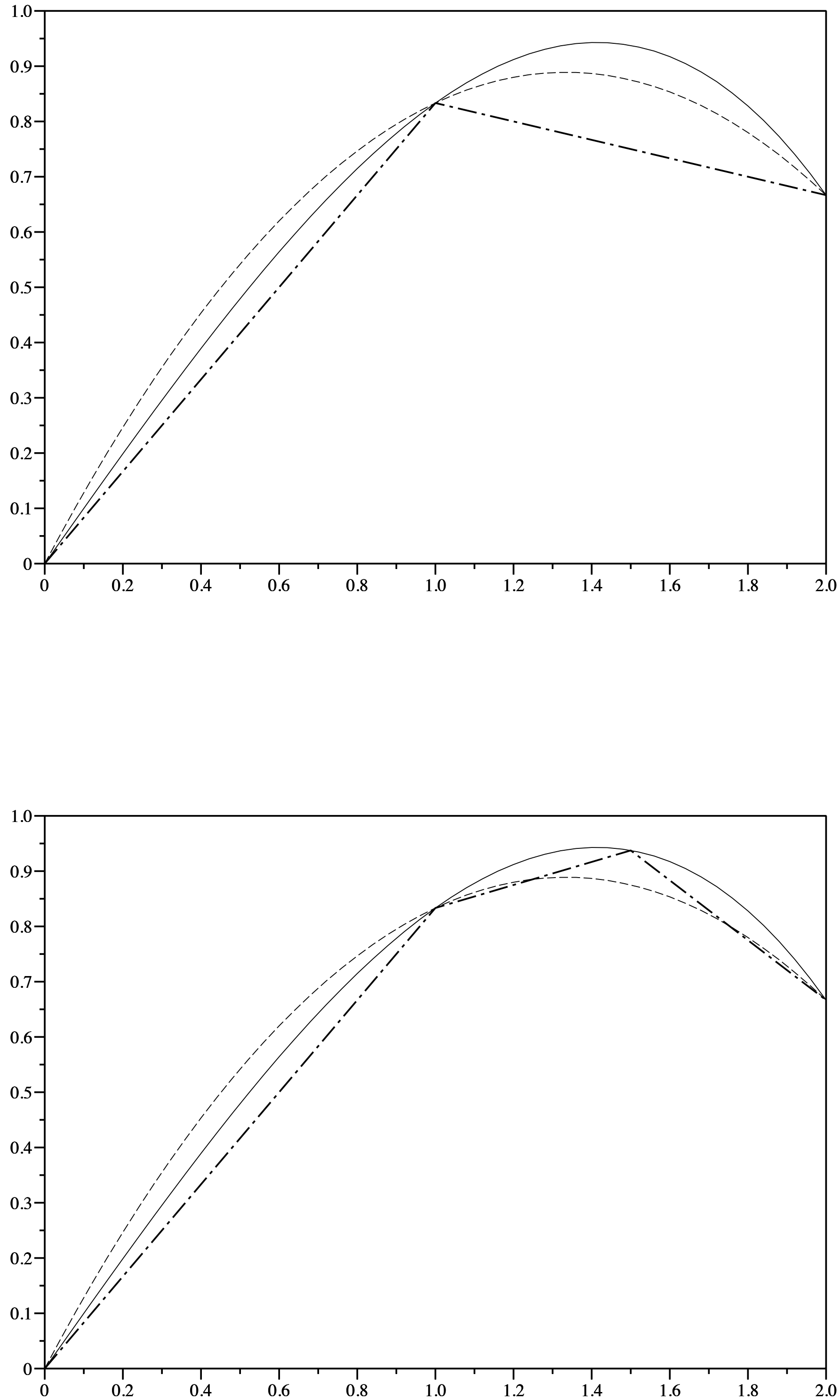

Figure 1 – Ex1 : Solutions éléments finis avec 2 et 3 éléments

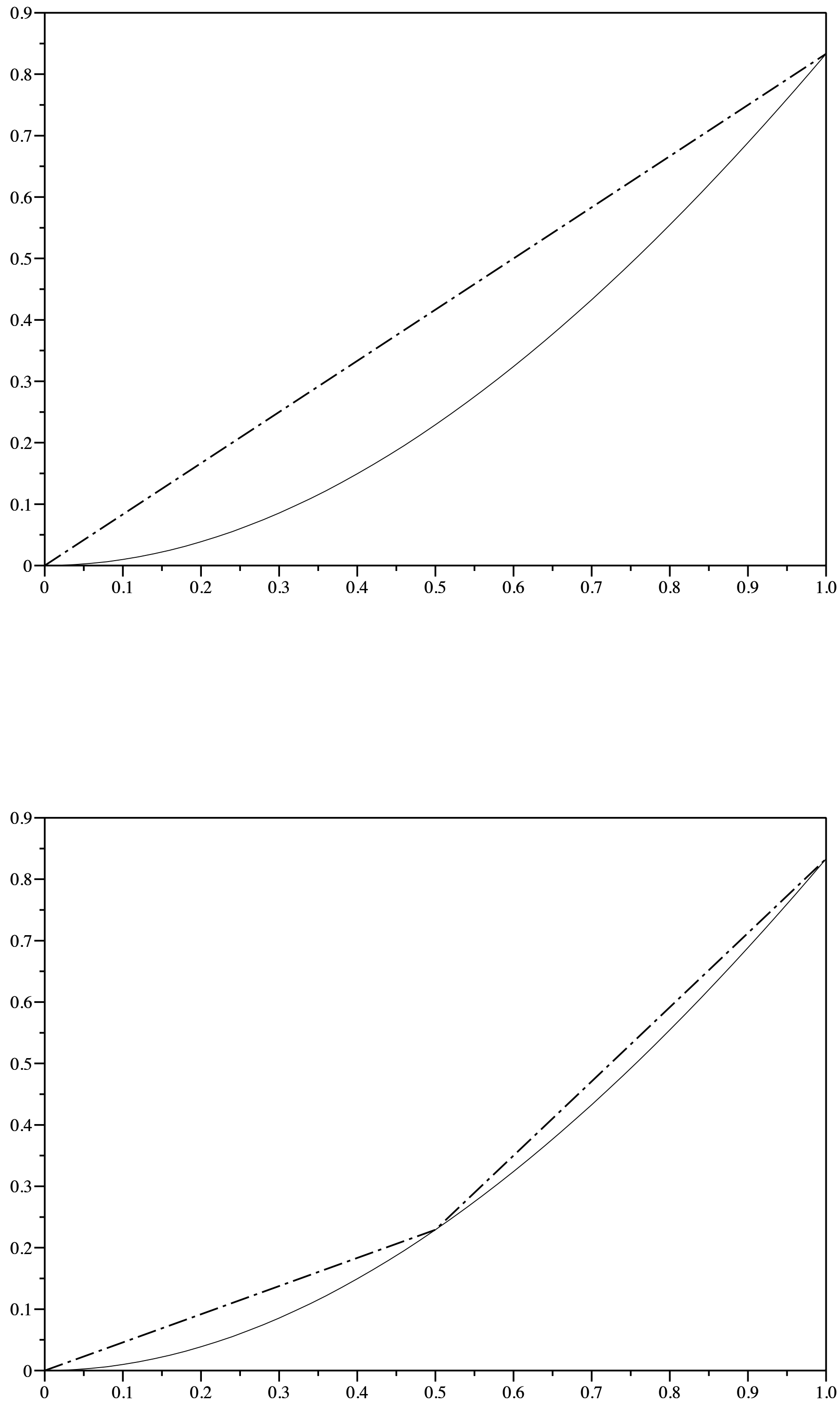

Figure 2 – Ex2 : Solutions éléments finis avec 1 et 2 éléments

TD 3
Thermique 2D

On étudie un plancher chauffant d'épaisseur $2e$. Il est constitué d'une dalle qui contient des tuyaux d'eau chaude. Les tuyaux sont uniformément répartis dans le plancher, et l'eau est considérée à température constante. De plus, nous supposerons que le système est en régime permanent.

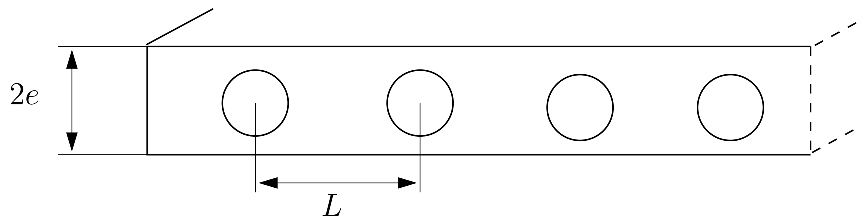

Figure 1 – Coupe du plancher

La face supérieure du plancher est en contact avec l'atmospère ambiante, il existe donc un flux de chaleur. La face inférieure est isolée thermiquement (flux nul).

Nous allons nous intéresser à une portion de plancher de longueur L comprise entre deux tuyaux. Compte tenu de la faible épaisseur de la dalle, nous considérons que le plan $x = cte$ est un plan isotherme. Nous allons donc étudier

$$\underline{\Delta T} = \underline{0} \text{ sur } \Omega \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{h}{\lambda}(T - T_0) \text{ sur } \Gamma_e \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Gamma_{-e} \\ T(x=0) = T_c \text{ sur } \Gamma_0 \\ T(x=L) = T_c \text{ sur } \Gamma_L \end{array} \right.$$

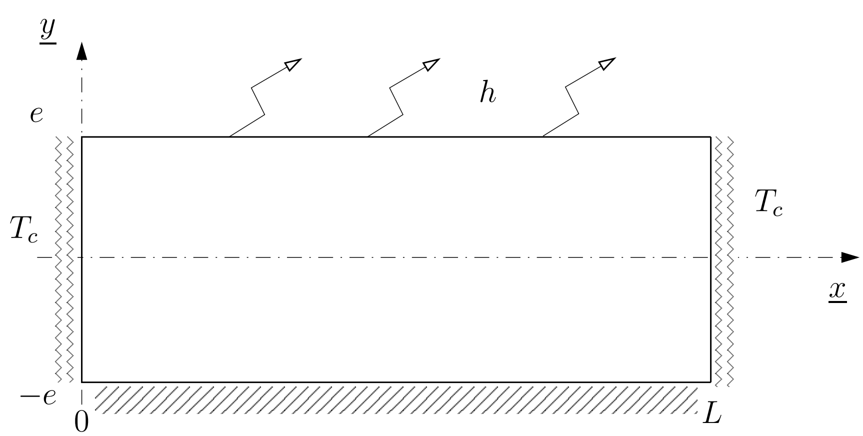

Figure 2 – Modélisation

La formulation intégrale faible du problème est, avec P les fonctions de projection,

$$\text{Trouver } T \text{ tel que } \int_\Omega \lambda \underline{\Delta T}\, \underline{\Delta P} + \int_{y=e} hTP = \int_{y=e} hT_0 P \quad \forall P$$

1 On remarque que la première partie de la formulation intégrale est bilinéaire, appelée $a(T,P)$, et la deuxième linéaire, appelée $L(P)$. Nous devons donc

$$\text{Trouver } T \text{ tel que } a(T,P) = L(P) \quad \forall P$$

On pose $T(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y) q_i$ et P de la même forme (Galerkin), avec
- n la dimension de l'espace d'approximation
- $N_i(x,y)$ la i^{eme} fonction de base
- q_i les valeurs au noeuds de $T(x,y)$

Ecrire le système matriciel correspondant au problème, en précisant la valeur du terme général de la matrice de raideur et du vecteur des efforts généralisés.

2 Dans le cadre des éléments finis, donner la forme de la matrice de raideur élémentaire et du vecteur des efforts généralisés élémentaire.

3 On choisit des éléments rectangles à quatre noeuds, et des fonctions de base de type éléments finis Q1, *i.e.* $N_i(\xi,\eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta$ définies sur ces rectangles. Déterminer les quatre fonctions de base $N_i(\xi,\eta)$.

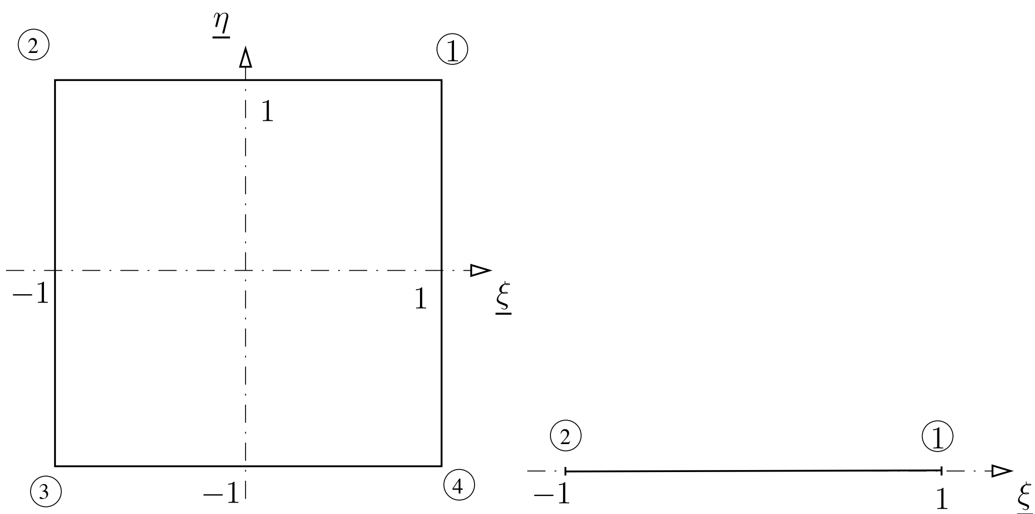

Figure 3 – Eléments

4 Sur le bord, on choisit des fonctions linéaires. Déterminer les deux fonctions de base $M_i(\eta)$.

5 Pour un élément rectangle de dimension $2a$x$2b$, calculer la matrice élémentaire de conduction $\underline{\underline{C_e}}$, *i.e.* $\int_\square \lambda \underline{\Delta T}\, \underline{\Delta P}\, d\square$

6 Pour un élément linéique de longueur $2a$, calculer la matrice élémentaire d'échange $\underline{\underline{E_e}}$, *i.e.* $\int_- hTPd-$.

7 Decrire la méthode d'assemblage de la matrice de conduction globale ($\underline{\underline{C}}$).