



Université de Versailles
St-Quentin en Yvelines

Département de Mécanique

Méthodes Numériques pour la Mécanique

L. CHAMPANEY

Résumé

Ce document contient les notes du cours de *méthodes numériques pour la mécanique* de l'UE5 en Maîtrise de Mécanique. Les méthodes abordées sont principalement les méthodes de discrétisation des problèmes de mécanique des milieux continus et les méthodes de résolution des équations d'équilibre discrètes linéarisées. Les méthodes numériques présentées sont abordées sous l'angle de leur utilisation pratique. Les aspects théoriques pourront être retrouvés dans les ouvrages cités dans la bibliographie.

Contents

Introduction	4
I Représentation des fonctions d'espace	10
1 Méthode générale d'approximation en espace	11
1.1 Problèmes considérés	11
1.2 Approximation (Ritz 1908 - Galerkin 1915)	11
1.3 Exemple : élasticité	12
1.4 Besoins	13
2 Méthode des Éléments Finis	14
2.1 Historique	14
2.2 Choix des fonctions de base	14
2.2.1 Fonctions locales	14
2.2.2 Maillage	14
2.2.3 Fonctions	15
2.2.4 Exemples	15
2.3 Écriture sous forme élémentaire	15
2.3.1 Intérêts	15
2.3.2 Calcul des termes de raideur	16
2.3.3 Calcul des termes de forces généralisées	16
2.4 Différentes étapes de l'écriture d'un élément	17
2.5 Différentes étapes de la résolution d'un problème	17
3 MEF 1D : barres élastiques	18
3.1 Écriture de l'élément	18
3.1.1 Géométrie de l'élément	18
3.1.2 Choix des fonctions de base	18
3.1.3 Expression du champ et de ses dérivées	19
3.1.4 Matrice de raideur élémentaire	20
3.1.5 Vecteur des forces généralisées	20
3.2 Utilisation de l'élément	21
3.2.1 Maillage	22
3.2.2 Choix de l'élément	22
3.2.3 Calcul de la matrice de raideur	22
3.2.4 Calcul du vecteur des forces généralisées	22
3.2.5 Prise en compte des conditions aux limites en déplacement	23

3.2.6	Résolution du système linéaire	23
3.2.7	Détermination du champ en tout point	23
3.2.8	Calcul des dérivées sur les éléments	24
3.2.9	Calcul des réactions aux appuis	24
4	MEF 2D : Conduction thermique	26
4.1	Approche variationnelle	26
4.1.1	Problème local	26
4.1.2	Écriture variationnelle	27
4.1.3	Théorème de l'énergie potentielle	28
4.2	Élément triangulaire pour la conduction thermique	28
4.2.1	Géométrie de l'élément	28
4.2.2	Choix des fonctions de base	28
4.2.3	Expression du champ et de ses dérivées	29
4.2.4	Matrice de conductivité élémentaire	30
4.2.5	Vecteur des "flux généralisés"	30
4.3	Utilisation de l'élément	30
4.3.1	Maillage	30
4.3.2	Choix de l'élément	31
4.3.3	Calcul de la matrice de conductivité	32
4.3.4	Calcul du vecteur des flux généralisées	32
4.3.5	Prise en compte des conditions aux limites en température	33
4.3.6	Résolution du système linéaire	33
4.3.7	Résolution du système linéaire	33
4.3.8	Calcul des dérivées sur les éléments	33
5	Quelques points techniques	35
5.1	Vocabulaire	35
5.2	Élément de référence	35
5.3	Intégration numérique	36
5.3.1	Intégration en dimension <i>un</i>	36
5.3.2	Intégration en dimension <i>deux</i>	36
5.4	Calcul des dérivées des fonctions	37
5.5	Prise en compte des conditions sur les inconnues	38
5.5.1	Forme générale des conditions	38
5.5.2	Méthode de pénalisation	38
5.5.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	39
5.6	Résolution du système linéaire	40
5.6.1	Méthode de Cholesky	40
5.6.2	Méthode de Crout	40
5.7	Stockage des matrices	40
5.7.1	Stockage symétrique	41
5.7.2	Stockage symétrique bande	41
5.7.3	Stockage symétrique profil ("skyline")	41

II	Résolution des problèmes en temps	42
6	Discrétisation temporelle	43
6.1	Représentation des fonctions du temps	43
6.2	Schéma d'intégration	44
6.3	Types de problèmes	44
7	Problèmes en temps : premier ordre	45
7.1	Exemple : viscoélasticité	45
7.2	Résolution explicite	46
7.2.1	Généralités	46
7.2.2	Utilisation	46
7.3	Résolution implicite	47
7.3.1	Généralités	47
7.3.2	Utilisation	47
8	Problèmes en temps : deuxième ordre	48
8.1	Exemple : dynamique du solide	48
8.2	Détermination de la solution transitoire	48
8.2.1	Généralités	48
8.2.2	Résolution explicite	49
8.2.3	Résolution implicite	49
8.2.4	Utilisation des différents schémas	49
8.3	Solution du problème homogène	50
8.3.1	Modes propres	50
8.3.2	Approche par la méthode de Rayleigh-Ritz	51
8.3.3	Utilisation pratique	52
8.4	Analyse modale	52

Introduction

Solutions recherchées en Mécanique

Dans la formation de Licence et Maîtrise de Mécanique, vous avez été amenés à traiter des problèmes de natures diverses dans les disciplines suivantes :

- Mécanique
 - des solides rigides,
 - des fluides,
 - des solides déformables.
- Thermique.
- Vibrations
 - de systèmes discrets,
 - de systèmes continus.

Dans toutes ces disciplines, la résolution d'un problème conduit à la recherche de solutions sous forme de champs dépendant du temps définis sur le domaine d'étude Ω et sur tout l'intervalle d'étude $[0, T]$:

- $\vec{U}(M, t)$, $\vec{V}(M, t)$, $\vec{\Gamma}(M, t)$, $\underline{\underline{\sigma}}(M, t)$, ... en mécanique du solide déformable,
- $\vec{V}(M, t)$, $p(M, t)$, ... en mécanique des fluides,
- $\vec{\theta}(M, t)$, $\vec{q}(M, t)$, ... en thermique,

où $M \in \Omega$ et $t \in [0, T]$.

Problèmes posés

Les problèmes sont généralement posés sous la forme de systèmes d'équations aux dérivées partielles paramétrées par le temps. Ces équations forment quatre groupes différents :

Les équations de conservation ou d'équilibre :

- $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \rho \gamma$ (solides déformables),
- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$ (eq. de lagrange),
- $\text{div} \vec{q} = c \frac{\partial \theta}{\partial t}$ (thermique),
- ...

les équations de comportement :

- $\underline{\underline{\sigma}} = A \underline{\underline{\epsilon}}$ (solides élastiques),
- $\vec{q} + k \text{grad} T = 0$ (loi de Fourier),
- $F = kx$ (ressort), $F = \nu \dot{x}$ (amortisseur),
- ...

les conditions aux limites (*C.L.*) :

- $\underline{\sigma}\vec{n} = F_d$ (forces surfaciques),
- $\vec{q}\vec{n} = h_d$ (flux de chaleur),
- $p_{x=0} = p_0$ (pression imposée),
- $V_{x=0} = V_0$ (vitesse imposée),
- ...

les conditions initiales (*C.I.*) :

- $x_{t=0} = x_0$ (C.I. en position),
- $\dot{x}_{t=0} = \dot{x}_0$ (en vitesse),
- $T_{t=0} = T_0$ (en température),
- ...

Systèmes continus / Systèmes discrets

Les systèmes mécaniques étudiés sont de deux natures : les systèmes discrets et les systèmes continus.

Systèmes discrets

L'état d'un système continu dépend de d'un nombre fini n de paramètres (notés q_i). Plusieurs types de systèmes discrets ont été rencontrés :

- Les systèmes naturellement (ou volontairement) discrets : C'est le cas des systèmes

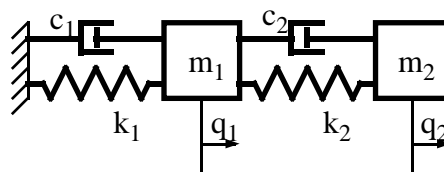


Figure 1: Système naturellement discret

masses-ressorts (figure 1), étudiés en vibration, qui consistent en un ensemble de masses ponctuelles en mouvement. Les paramètres sont alors les positions de ces masses. L'aspect discret du système provient d'un choix de modélisation simple.

- Les systèmes de solides rigides : Dans le cas des ensembles de solides rigides (figure 2), le côté discret du système provient du comportement simple donné à chacun des constituants. Le mouvement d'un solide rigide est paramétré par un vecteur position et un vecteur rotation. Les composantes de ces torseurs sont les paramètres du système.

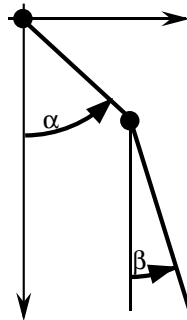


Figure 2: Systèmes discrets : solides rigides

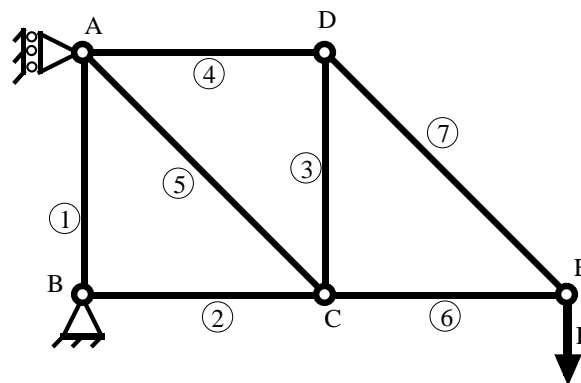


Figure 3: Systèmes discrets : treillis

- Les treillis : Le cas des treillis (figure 3) est intéressant car il est à la limite entre un système discret et un système continu. Le côté discret du système provient du comportement simple qui peut être donné à chacune des barres étant donné la nature des sollicitations d'un treillis. Les barres étant seulement sollicitées en traction/compression, leur déformation peut être représentée à partir des seuls déplacements des extrémités. Les paramètres du système sont donc les composantes de déplacement des nœuds du treillis.

La nature discrète de ces problèmes permet de pousser relativement loin l'étude, surtout lorsque le nombre de paramètres est limité.

Systèmes continus

Les systèmes continus correspondent en général à un ou plusieurs domaine(s) (fluide ou solide) appelés *milieu(x) continu(s)*. L'état de ces milieux est représenté par un état en chacun des points qui le constitue : il faut donc une *infinité* de paramètres pour décrire l'état du système.

Les systèmes continus ont été rencontrés en :

- mécanique des milieux déformables solides (fig 4),
- mécanique des milieux continus fluides (fig 5),
- thermique des milieux continus (fluides ou solides) (fig 6),

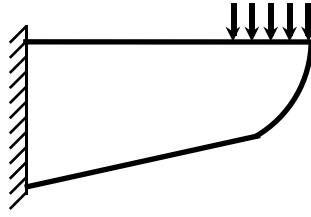


Figure 4: Milieu continu solide : déformation d'une poutre console

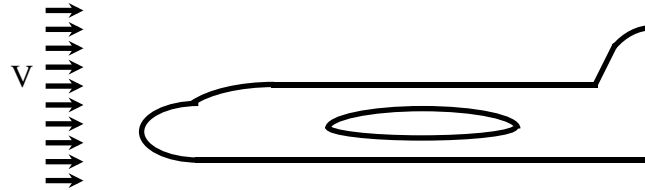


Figure 5: Milieu continu fluide : écoulement autour d'un avion

- vibration des milieux continus (fluides ou solides).

Les problèmes traités analytiquement, sont généralement unidimensionnels ou bien de géométrie très simple. Pour pouvoir traiter des situations réelles de géométries complexes bi- ou tridimensionnelles il est indispensable de passer par une première étape qui transforme un système continu en un système discret à l'aide d'une première forme d'approximation : la discrétisation.

Équations du mouvement – linéarité

En regroupant les équations d'équilibre, de comportement et les conditions aux limites (à l'aide d'une formulation globale du problème, par exemple); On obtient les *équations du mouvement*; Pour un problème discret, il y a autant d'équations du mouvement que de paramètres. En mécanique, ces équations dépendent généralement des n paramètres et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 :

$$f(q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)) = 0, \quad i = 1 \dots n$$

Ces équations du mouvement peuvent être :

- *linéaires* et elles prennent alors la forme d'un système linéaire d'équations différentielles du second ordre :

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{C}\dot{q} + \mathbf{K}q$$

où q est le vecteur des paramètres. L'intégration de ce système et l'application des conditions initiales permettent d'obtenir l'évolution des paramètres du système au cours du temps.

- ou *non-linéaires* et alors leur intégration devient très délicate. Les non linéarités peuvent avoir différentes origines :
 - grandes amplitudes des déplacements ou des déformations,
 - comportement non linéaires des matériaux,

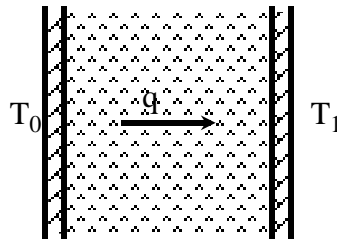


Figure 6: Thermique : gradient de température dans un mur

- comportement non linéaires des liaisons (contact unilatéral, frottement, ...),
- ...

Pour permettre une résolution numérique de ces équations, il est indispensable de pratiquer une deuxième approximation : la linéarisation des équations d'équilibre.

Problèmes liés au temps

La recherche de l'évolution des paramètres du système au cours du temps par intégration des équations d'équilibre contient une nouvelle difficulté : la dimension infinie du problème. Un paramètre peut prendre autant de valeurs différentes qu'il y a d'instantanés dans l'intervalle $[0, T]$, c'est à dire une infinité.

Pour les problèmes statiques ou stationnaires, l'équation d'équilibre prend la forme :

$$\mathbf{K}q = F(t)$$

et sa résolution ne fait pas intervenir le temps.

Par contre pour des équations d'équilibre d'ordre *un*

$$\mathbf{C}\dot{q} + \mathbf{K}q = F(t)$$

ou d'ordre *deux*

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{C}\dot{q} + \mathbf{K}q = F(t)$$

l'obtention de l'évolution des paramètres (et de leur dérivées) est réalisée numériquement en pratiquant une troisième approximation : l'application d'un schéma d'intégration numérique.

Il faut remarquer que pour certains types de problèmes l'évolution temporelle des paramètres peut s'obtenir par recombinaison modale. Cette technique nécessite l'écriture d'un *problème aux valeurs propres* :

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}] = 0$$

dont la résolution se fait numériquement.

Méthodes Numériques en Mécanique

Trois approximations sont donc généralement pratiquées en mécanique :

- la discrétisation, qui permet de passer d'un problème continu à un problème discret,
- la linéarisation des équations d'équilibre,

- l'*intégration* numérique des équations d'équilibre.

La *linéarisation* est un processus un petit peu particulier qui dépend du problème traité et qui est volontairement laissé de côté dans ce cours.

La *discrétisation* fait l'objet du premier chapitre qui se limite à une forme de discrétisation très employée de manière industrielle : la méthode des *éléments finis*.

L'*intégration* des équations d'équilibre est traitée dans la deuxième partie qui présente les schémas d'intégration au premier et au deuxième ordre *explicites* et *implicites*.

La troisième partie traite rapidement des méthodes d'analyse modale.

Part I

Représentation des fonctions d'espace

Chapter 1

Méthode générale d'approximation en espace

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à l'approximation de fonctions d'espace. L'approximation en temps est traitée dans la partie suivante. On ne s'intéresse donc qu'à des fonctions $f(M)$.

1.1 Problèmes considérés

On cherche une fonction $f(M)$ avec $M \in \Omega$. $f(M)$ peut être scalaire (température ...), vectorielle (déplacement, vitesse, ...) ou tensorielle (contraintes, déformations, ...). Elle vérifie un problème aux dérivées partielles :

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \dots\right) = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$f = f_d ; \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_d \dots \text{ sur } \partial\Omega$$

1.2 Approximation (Ritz 1908 - Galerkin 1915)

Un moyen simple de représenter f est de l'approcher par la fonction :

$$f_a(M) = q_i \omega_i(M), \quad i = 1 \dots N$$

où les q_i sont des paramètres scalaires et les $\omega_i(M)$ sont des fonctions définies sur Ω qui dépendent du type de problème traité ainsi que de la richesse de l'approximation.

La recherche de la solution $f(M)$ est remplacée par la recherche des N paramètres scalaires q_i . On voit tout de suite que la représentation de la fonction f sous forme d'un jeu de paramètres scalaires est bien adaptée au traitement numérique des problèmes.

Les fonctions $\omega_i(M)$ doivent être suffisamment dérivables sur Ω pour que le problème puisse être posé.

Si les $\omega_i(M)$ forment une base, $f_a(M)$ est la projection de f dans le sous espace vectoriel engendré par les $\omega_i(M)$. On parle alors de *fonctions de base*.

Les conditions aux limites seront prises en compte dans le choix des fonctions de base $\omega_i(M)$. Elles se traduiront par des relations supplémentaires sur les q_i .

1.3 Exemple : élasticité

On considère le problème d'élasticité suivant : Trouver le champ de déplacement $\vec{u}(M)$ et le champ de tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(M)$ solutions de :

- \vec{u} cinématiquement admissible (CA) : $\vec{U} \in \mathcal{U}_{ad}$,
- $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement admissible (SA) : $\underline{\underline{\sigma}} \in \Sigma_{ad}$,
- $\underline{\underline{\sigma}} = A\underline{\underline{\epsilon}}$ (comportement élastique).

Les espaces admissibles sont définis par :

- $\mathcal{U}_{ad} = \{\vec{v} \text{ régulier} / \vec{V} = \vec{v}_d \text{ sur } \partial_u \Omega\}$
- $\Sigma_{ad} = \{\underline{\underline{\tau}} \text{ régulier, symétrique} / \text{div} \underline{\underline{\tau}} + \vec{f}_d = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \underline{\underline{\tau}} \vec{n} = \vec{F}_d \text{ sur } \partial_F \Omega\}$

On pose ce problème sous forme globale à l'aide d'une approche énergétique, le théorème de l'énergie potentielle :

\vec{u} solution $\in \mathcal{U}_{ad}$ et minimise l'énergie potentielle :

$$Ep(\vec{u}) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} A\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) d\Omega}_{E_d(\vec{u})} - \underbrace{\int_{\Omega} \vec{f}_d \vec{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{F}_d \vec{u} dS}_{L(\vec{u})}$$

On approche $\vec{u}(M)$ par :

$$\vec{u}_a(M) = q_i \vec{\omega}_i(M) \quad (i = 1 \dots N)$$

On a alors :

$$E_d(\vec{u}_a) = \frac{1}{2} q_i \left(\int_{\Omega} A\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_i) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_j) d\Omega \right) q_j$$

$$L(\vec{u}_a) = q_i \left(\int_{\Omega} \vec{f}_d \vec{\omega}_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{F}_d \vec{\omega}_i dS \right)$$

Soit sous forme matricielle :

$$E_d(\vec{u}_a) = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q] \quad \text{et} \quad L(\vec{u}_a) = [q]^T [F]$$

$[K]$ est appelée matrice de raideur et ses éléments sont notés K_{ij} :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} A\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_i) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_j) d\Omega$$

et $[F]$ matrice des forces généralisées et ses éléments notés F_i :

$$F_i = \int_{\Omega} \vec{f}_d \vec{\omega}_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{F}_d \vec{\omega}_i dS$$

L'énergie potentielle prend alors la forme :

$$E_p(\vec{u}_a) = \frac{1}{2}[q]^T[K][q] - [q]^T[F]$$

et son minimum est atteint pour :

$$\frac{\partial E_p}{\partial [q]^T} = 0 \quad \Rightarrow \quad [K][q] = [F]$$

La solution du problème approché est obtenue par résolution d'un système linéaire de taille N .

La condition \vec{U}_a CA doit être prise en compte pendant la résolution par un certain nombre de relations supplémentaires entre les q_i . Cette dernière opération peut s'avérer délicate.

1.4 Besoins

- Aspect local de l'approximation :
 - La prise en compte des CL ne porte que sur un petit nombre de paramètres.
 - L'approximation peut être enrichie localement
- Intégration des fonctions de base sur le domaine.
- Prise en compte simple de toute sorte de géométrie.
- Calcul simple de la valeur de la fonction en un point.

Chapter 2

Méthode des Éléments Finis

2.1 Historique

- Méthodes d'approximations :
 - Fonctions de base sur tous le domaine : *Ritz 1908, Galerkin 1915.*
 - Fonctions de base locales : *Courant 1943*
- Méthodes de calcul :
 - Approches énergétiques : *Navier 1819, Maxwell-Castigliano 1870*
 - Développement systématique des approches énergétiques : *Levy 1947, Garvey 1951*
 - Développement des approches matricielles
- Méthode des éléments finis
 - Unification des deux méthodes : *Argyris 1955*
 - Développement systématique, vulgarisation et utilisation industrielle : *Zienkiewicz 1960* →

2.2 Choix des fonctions de base

2.2.1 Fonctions locales

Les fonctions de base utilisées par la MEF sont locales autour de points particuliers. Le domaine Ω est représenté par un ensemble de points (*les nœuds*). Chaque fonction est associée à un nœud.

2.2.2 Maillage

En fait le domaine est représenté par un nombre fini d'éléments de forme simple. Les nœuds sont les sommets des éléments. Les éléments assurent la couverture du domaine avec un recouvrement maximal de manière à ce que :

$$\int_{\Omega} \dots d\Omega \simeq \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \dots d\Omega_e$$

Il s'agit là d'une deuxième approximation de la méthode car la couverture du domaine peut être incomplète (voir figure 2.1).

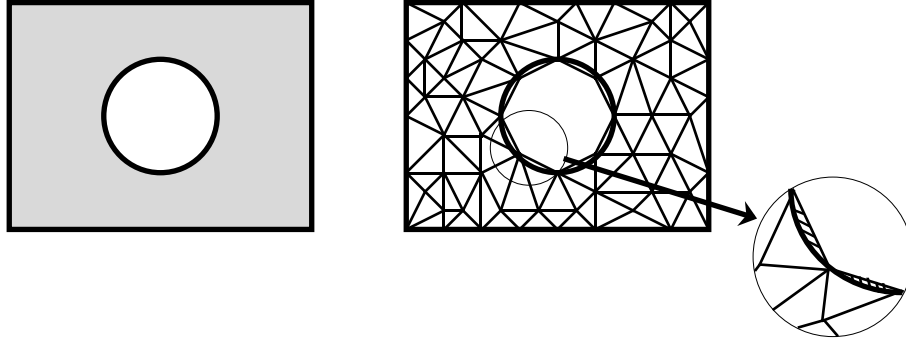


Figure 2.1: Approximation de couverture du domaine

2.2.3 Fonctions

Les fonctions de base sont choisies de telle manière que :

$\omega_i = 1$ au nœud i et $\omega_i = 0$ au nœud $j \forall j \neq i$.

Et la fonction ω_i est non nulle sur les éléments dont le nœud i est un sommet.

Ainsi lorsque

$$f_a(M) = q_i \omega_i(M) \quad i = 1 \dots N$$

q_i est directement la valeur de $f_a(M)$ au nœud i .

En pratique les fonctions ω_i sont simples (polynomiales de bas degré) et la richesse de l'approximation est donnée par la taille des éléments du maillage (finesse du maillage).

La simplicité de forme des éléments permettra l'intégration des fonctions sur le domaine Ω .

2.2.4 Exemples

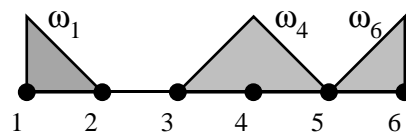


Figure 2.2: Fonctions de base linéaires en 1D

2.3 Écriture sous forme élémentaire

2.3.1 Intérêts

Le calcul des termes de rigidité et de raideur nœud par nœud (fonction de base par fonction de base) n'est pas tellement systématique car chaque fonction de base n'a pas le même domaine

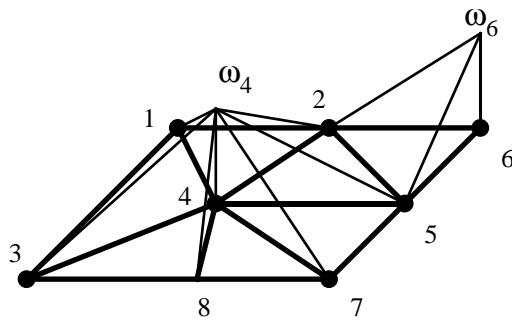


Figure 2.3: Fonctions de base linéaires en 2D

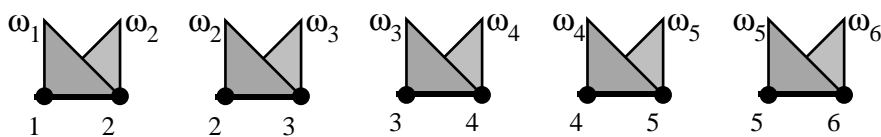


Figure 2.4: Contributions élémentaires

de couverture. On préfère calculer les contributions de chaque élément ce qui conduit à des calculs similaires sur chaque élément.

On parle alors de *matrice de raideur élémentaire* et de *vecteur forces généralisées élémentaire*. Ces éléments seront assemblés entre eux pour former la matrice et le vecteur complet.

2.3.2 Calcul des termes de raideur

Chaque terme de la matrice de raideur, K_{ij} , fait intervenir des produits des dérivées des deux fonctions ω_i et ω_j . Il n'est non nul que sur les éléments dont les nœuds i et j sont des sommets.

Par exemple, en élasticité :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} A \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_i) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_j) d\Omega$$

peut s'écrire

$$K_{ij} = \sum_e \int_{\Omega_e} A \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_i) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_j) d\Omega_e = \sum_e K_{ij}^e$$

La matrice de raideur globale peut être construite comme un assemblage de matrices de raideur relatives à chacun des éléments. Elles sont appelées *matrices de raideur élémentaires*.

2.3.3 Calcul des termes de forces généralisées

Chaque terme du vecteur forces généralisées, F_i , fait intervenir la fonctions ω_i seulement. Il n'est non nul que sur les éléments dont le nœud i est un sommet.

Par exemple, en élasticité :

$$F_i = \int_{\Omega} \vec{f}_d \vec{\omega}_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{F}_d \vec{\omega}_i dS$$

peut s'écrire

$$F_i = \sum_e \int_{\Omega_e} \vec{f}_d \vec{\omega}_i d\Omega_e + \int_{\partial\Omega_e} \vec{F}_d \vec{\omega}_i dS_e = \sum_e F_i^e$$

Le vecteur forces généralisées global peut être construit comme un assemblage de vecteurs forces généralisées relatifs à chacun des éléments. Ils sont appelés *vecteurs forces généralisées élémentaires*.

2.4 Différentes étapes de l'écriture d'un élément

1. Choix de la géométrie de l'élément
 - 1D** *segments* droits ou courbes
 - 2D** *triangles, quadrangles* à bords droits ou courbes
 - 3D** *tétraèdres, pyramides, prismes, cubes* droits ou courbes
2. Choix des fonctions de base et des inconnues
3. Expression des champs et de leurs dérivées
4. Calcul de la matrice de raideur élémentaire
5. Calcul des vecteurs forces généralisés élémentaires associés aux différents cas de chargement

2.5 Différentes étapes de la résolution d'un problème

1. Maillage : découpage du domaine en éléments géométriques
2. Choix de la formulation : Choix des fonctions de base
3. Calcul des matrices de raideur : calcul des matrices élémentaires puis assemblage de la matrice globale.
4. Calcul du vecteur des forces généralisées : idem
5. Prise en compte de CL sur les inconnues.
6. Résolution du système linéaire.
7. Détermination du champ en tout point.
8. Calcul des dérivées sur les éléments.
9. Détermination des réactions aux limites.

Chapter 3

MEF 1D : barres élastiques

Pour illustrer la résolution d'un problème de mécanique par la méthode des éléments finis, ce chapitre présente un exemple simple unidimensionnel. On s'intéresse à un problème de résistance des matériaux où n'intervient que la traction. C'est un problème de *barre* élastique.

3.1 Écriture de l'élément

3.1.1 Géométrie de l'élément

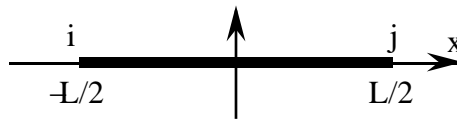


Figure 3.1: Géométrie de l'élément "Barre"

On considère une section S et un module d'Young E constants.

3.1.2 Choix des fonctions de base

Le choix est guidé par les critères suivants :

- Simplicité.
- Représentation des champs de solide rigide.
- Représentation des champs de déformation constants.
- Régularité.

On vérifie les critères précédents on choisit le polynôme de plus bas degré qui permet d'obtenir une déformation constante sur l'élément, c'est à dire un polynôme de degré un :

$$\epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = a = cste \Rightarrow u(x) = ax + b$$

Pour assurer la continuité entre deux éléments, on écrit plutôt :

$$u(x) = \frac{u_j - u_i}{L}x + \frac{u_i + u_j}{2}$$

ou

$$u(x) = u_i \underbrace{\left(-\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right)}_{\omega_i(x)} + u_j \underbrace{\left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right)}_{\omega_j(x)}$$

ce qui donne la représentation graphique suivante des fonctions de base.

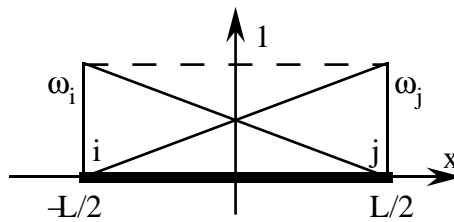


Figure 3.2: Fonctions de base de l'élément "Barre"

3.1.3 Expression du champ et de ses dérivées

déplacement

$$u(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x}{L} + \frac{1}{2} & \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

déformation

$$\epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{u_i - u_j}{L}$$

$$\epsilon(x) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

Contrainte

$$N(x) = ES\epsilon(x) = ES\left(\frac{u_i - u_j}{L}\right)$$

$$N(x) = \begin{bmatrix} \frac{-ES}{L} & \frac{ES}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

3.1.4 Matrice de raideur élémentaire

Énergie de déformation élémentaire :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ES \epsilon^2(x) dx$$

$$E_d = \frac{1}{2} ES \left(\frac{u_j - u_i}{L} \right)^2 L = \frac{1}{2} \frac{ES}{L} (u_j - u_i)^2$$

qu'on souhaite écrire sous la forme

$$E_d = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} [K_e] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

soit

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & -\frac{ES}{L} \\ -\frac{ES}{L} & \frac{ES}{L} \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut aussi l'obtenir sous la forme :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ES \epsilon(x) \epsilon(x) dx$$

$$E_d = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ES \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

Soit :

$$[K_e] = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ES \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.5 Vecteur des forces généralisées

De manière générale, le travail des forces extérieures s'exprime sous la forme :

$$L = F_i u_i + F_j u_j + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) u(x) dx$$

Dans le cas de forces concentrées on a donc :

$$[F_e] = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix}$$

Pour les forces réparties, l'expression dépend de $f(x)$:

- $f(x)$ constant, $f(x) = f$

$$L = f \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{u_j - u_i}{L} x + \frac{u_i + u_j}{2} \right] dx$$

$$= f \left(\frac{u_i + u_j}{2} \right) L = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \frac{L}{2} \\ f \frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

soit :

$$[F_e] = \frac{fL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $f(x)$ linéaire, $f(x) = f \frac{2x}{L}$

$$L = f \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \left[\frac{u_j - u_i}{L} x + \frac{u_i + u_j}{2} \right] dx$$

$$L = f \frac{2}{L} \left[2 \frac{L^3}{3.8} \frac{u_j - u_i}{L} \right] = \frac{fL}{6} (u_j - u_i)$$

soit :

$$[F_e] = \frac{fL}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Utilisation de l'élément

On se pose le problème de Résistance de Matériau suivant. Une barre de longueur l , de section S et constitué d'un matériau de caractéristique élastique E est soumise à son propre poids ($f = \rho g$). Elle est soumise à une action $-F$ à une extrémité en encastree à l'autre.

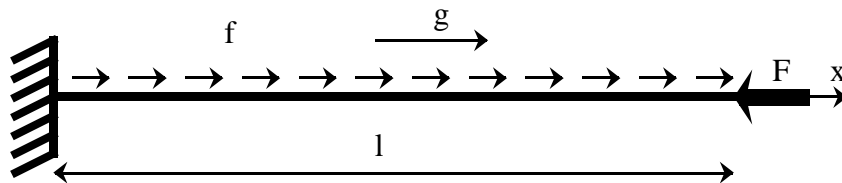


Figure 3.3: Barre soumise à son propre poids et à une action en bout

La solution RdM est :

Effort normal

$$N(x) = -f(l - x) - F$$

Déformation

$$\epsilon(x) = \frac{f}{ES}(l - x) - \frac{F}{ES}$$

Déplacement

$$u(x) = \frac{f}{ES} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{F}{ES} x$$

3.2.1 Maillage

On utilise le maillage présenté sur la figure 3.4. Il est composé de trois éléments de longueurs identiques et donc de quatre nœuds.

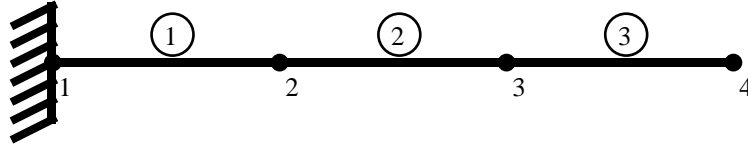


Figure 3.4: Maillage de la barre

3.2.2 Choix de l'élément

On utilise l'élément défini précédemment. On a alors $l = 3L$. La matrice de raideur est :

$$[K_e] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Calcul de la matrice de raideur

Le maillage est défini par le tableau de connectivité 3.1.

élément	nœud i	nœud j
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Table 3.1: Table de connectivité du maillage

On pratique l'assemblage des matrices élémentaires :

$$[K] = \frac{3ES}{l} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

Ce qui donne :

$$[K] = \frac{3ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.4 Calcul du vecteur des forces généralisées

- Force concentrée sur l'élément 3 :

$$[F_e] = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \end{bmatrix}$$

- Force répartie sur tous les éléments

$$[F_e] = \frac{Fl}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On pratique l'assemblage des vecteurs élémentaires :

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

Ce qui donne :

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix}$$

3.2.5 Prise en compte des conditions aux limites en déplacement

La condition d'encastrement au nœud 1 s'écrit : $u_1 = 0$. La façon la plus simple de résoudre est de remplacer le système :

$$\frac{3ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix}$$

par :

$$\frac{3ES}{l} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix}$$

3.2.6 Résolution du système linéaire

Le système a pour solution :

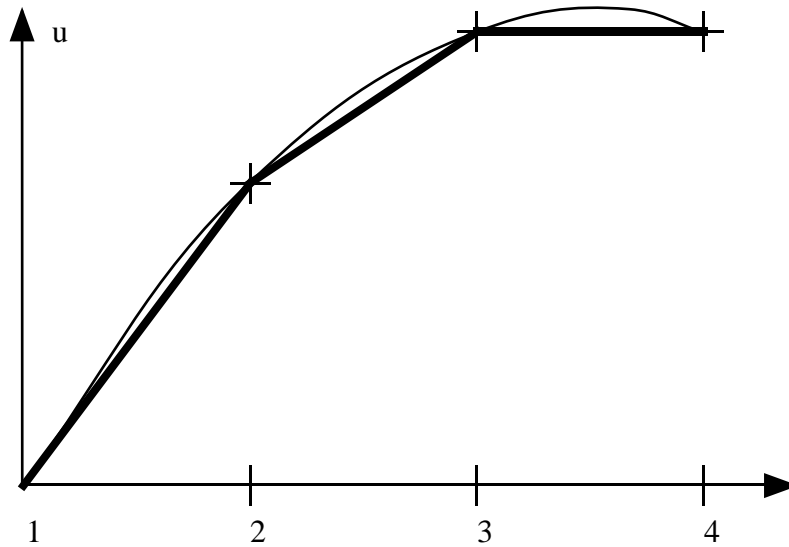
$$u_2 = \frac{l}{3ES} \left[\frac{5}{6} fl - F \right]$$

$$u_3 = \frac{l}{3ES} \left[\frac{8}{6} fl - 2F \right]$$

$$u_4 = \frac{l}{3ES} \left[\frac{9}{6} fl - 3F \right]$$

3.2.7 Détermination du champ en tout point

La figure 3.5 donne la représentation *éléments finis* du champ $u(x)$.

Figure 3.5: Déplacement calculé et solution Rdm (pour $F = fl/6$)

3.2.8 Calcul des dérivées sur les éléments

La déformation $\epsilon(x)$ et l'effort normal $N(x)$ sont calculés de manière élémentaire :

$$\epsilon(x) = \frac{u_i - u_j}{L} \quad N(x) = ES \frac{u_i - u_j}{L}$$

Élément 1

$$\epsilon(x) = \frac{1}{ES} \left[\frac{5}{6} fl - F \right] \quad N(x) = \frac{5}{6} fl - F$$

Élément 2

$$\epsilon(x) = \frac{1}{ES} \left[\frac{3}{6} fl - F \right] \quad N(x) = \frac{3}{6} fl - F$$

Élément 3

$$\epsilon(x) = \frac{1}{ES} \left[\frac{1}{6} fl - F \right] \quad N(x) = \frac{1}{6} fl - F$$

Il est intéressant de remarquer que le champ $N(x)$ n'est pas statiquement admissible.

3.2.9 Calcul des réactions aux appuis

Le champ $N(x)$ n'étant pas SA, il ne peut être utilisé pour le calcul des réactions aux appuis. Pour calculer la réaction R à l'encastrement, on peut résoudre :

$$\frac{3ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} + R \\ \frac{Fl}{3} \\ \frac{Fl}{3} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix}$$

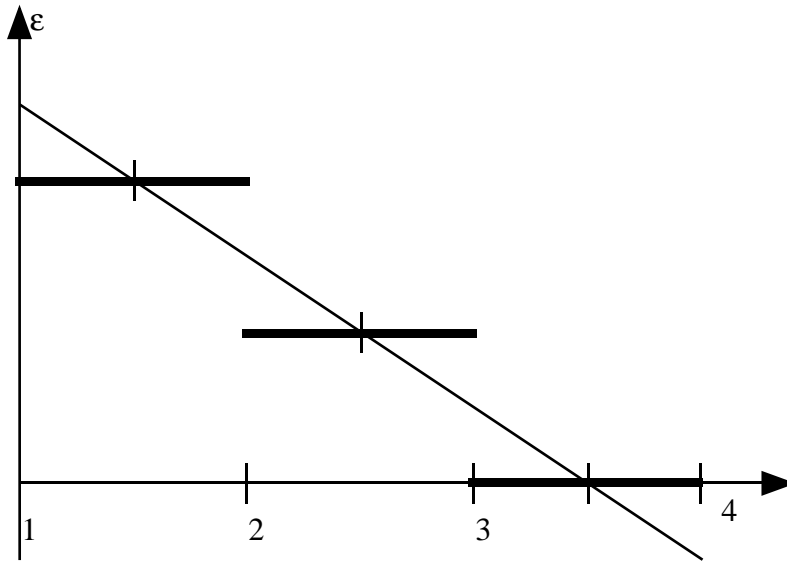


Figure 3.6: Déformation calculée et solution Rdm (pour $F = fl/6$)

Qui donne

$$R = F - fl$$

Chapter 4

MEF 2D : Conduction thermique

Pour présenter l'application de la méthode des éléments finis à des problèmes bidimensionnels, ce chapitre s'intéresse à un problème simple de conduction thermique. La simplicité vient, ici, du fait que le champ discrétisé est le champ de température qui ne comporte qu'une seule inconnue par nœud — contrairement à un champ de déplacement en élasticité plane qui, lui, aurait deux inconnues par nœuds : les deux composantes du déplacement dans le plan.

4.1 Approche variationnelle

4.1.1 Problème local

On s'intéresse à un domaine Ω occupé par un matériau conducteur de chaleur. Sur la partie du bord $\partial_1\Omega$ est imposée une température T_d et sur le reste du bord $\partial_2\Omega$ est imposé un flux de chaleur h_d .

Le problème local de conduction thermique est posé sous la forme :

Trouver le champ de température $T(M)$ et le champ de vecteur courant de chaleur $\vec{q}_c(M)$ tels que :

Liaison

$$T = T_d, \quad \forall M \in \partial_1\Omega$$

Équilibre thermique

$$\operatorname{div}\vec{q}_c = 0, \quad \forall M \in \Omega \quad ; \quad \vec{q}_c\vec{n} + h_d = 0, \quad \forall M \in \partial_2\Omega$$

Comportement thermique (loi de Fourier)

$$\vec{q}_c = -k\overrightarrow{\operatorname{grad}}T, \quad \forall M \in \Omega$$

En posant $\vec{q}(M) = -\vec{q}_c(M)$ et $\theta(M) = T - T_0$, on obtient le problème suivant :

Trouver les champs $\theta(M)$ et $\vec{q}(M)$ tels que :

Liaison

$$\theta = \theta_d, \quad \forall M \in \partial_1\Omega$$

Équilibre thermique

$$\operatorname{div} \vec{q} = 0, \quad \forall M \in \Omega \quad ; \quad \vec{q}\vec{n} = h_d, \quad \forall M \in \partial_2\Omega$$

Comportement thermique (loi de Fourier)

$$\vec{q} = k \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta, \quad \forall M \in \Omega$$

qui est analogue a celui de l'élasticité linéaire (voir tableau 4.1)

Mécanique	Thermique
$\vec{u}(M)$	$\theta(M)$
$\underline{\underline{\sigma}}$	$-\vec{q}_c = \vec{q}$
$\underline{\underline{\epsilon}}$	$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta$
\vec{f}_d	$\vec{0}$
\vec{F}_d	h_d
\vec{u}_d	θ_d

Table 4.1: Analogie mécanique-thermique

4.1.2 Écriture variationnelle

Par analogie avec l'élasticité le problème précédent peut être écrit sous la forme :

$\vec{q}(M)$, vérifiant les conditions d'équilibre thermique, et $\theta(M)$, vérifiant les conditions de liaison et de régularité, sont solution du problème de conduction quand ils minimisent la fonctionnelle $J(\theta, \vec{q})$:

$$J(\theta, \vec{q}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\vec{q} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta \right) k^{-1} \left(\vec{q} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta \right) d\Omega$$

En développant, on obtient :

$$J(\theta, \vec{q}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{q} k^{-1} \vec{q} d\Omega + \int_{\Omega} k \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta d\Omega - \int_{\Omega} \vec{q} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta d\Omega$$

Or :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \vec{q} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta d\Omega &= \int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} \vec{q}}_{\vec{0}} \theta d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{q}\theta) d\Omega \\ &= - \int_{\partial_1\Omega} \vec{q}\vec{n} \underbrace{\theta}_{\theta_d} dS - \int_{\partial_2\Omega} \underbrace{\vec{q}\vec{n}}_{h_d} \theta dS \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J(\theta, \vec{q}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{q} k^{-1} \vec{q} d\Omega - \int_{\partial_1\Omega} \vec{q}\vec{n} \theta_d dS && (= E_c(\vec{q})) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} k \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta d\Omega - \int_{\partial_2\Omega} h_d \theta dS && (= E_p(\theta)) \end{aligned}$$

4.1.3 Théorème de l'énergie potentielle

Le champ d'écart de température $\theta(M)$, vérifie les condition de régularité et de température imposée, et minimise la fonctionnelle :

$$E_p(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k \overrightarrow{\text{grad}} \theta \overrightarrow{\text{grad}} \theta d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} h_d \theta dS$$

4.2 Élément triangulaire pour la conduction thermique

4.2.1 Géométrie de l'élément

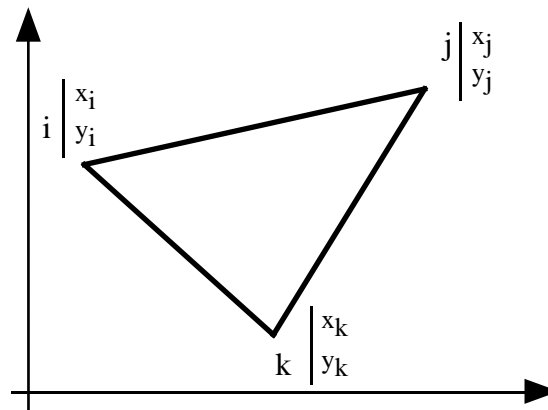


Figure 4.1: Géométrie de l'élément

On considère une épaisseur e et un coefficient k constants.

4.2.2 Choix des fonctions de base

Le choix est guidé par les critères suivant :

- Simplicité.
- Représentation des champs de solide rigide.
- Calcul du gradient possible.
- Régularité.

Ce qui conduit à choisir une fonction linéaire en x et en y . La température est écrite sur l'élément :

$$\theta(M) = \theta_i \omega_i(x, y) + \theta_j \omega_j(x, y) + \theta_k \omega_k(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$$

Par exemple, la fonction ω_i s'écrit :

$$\omega_i(x, y) = \frac{(x - x_j)(y_j - y_k) - (y - y_j)(x - x_k)}{(x_i - x_j)(y_j - y_k) - (y_i - y_j)(x_i - x_k)} = \frac{N}{D}$$

On peut remarquer que :

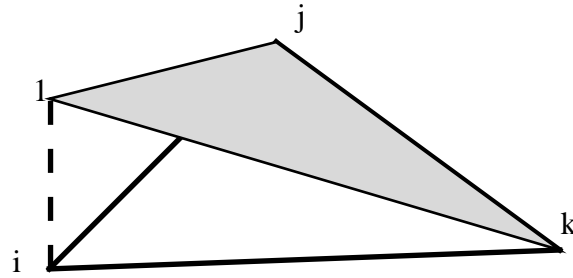


Figure 4.2: Fonctions de base de l'élément

$$N = (\vec{j}\vec{k} \wedge \vec{j}\vec{M}) \cdot \vec{z} = 2 \cdot \text{Aire}(jkM) \quad \text{et} \quad D = (\vec{j}\vec{k} \wedge \vec{j}\vec{i}) \cdot \vec{z} = 2 \cdot \text{Aire}(ijk)$$

On a alors :

$$\omega_i(M) = \frac{\text{Aire}(jkM)}{\text{Aire}(ijk)} \quad \omega_j(M) = \frac{\text{Aire}(ikM)}{\text{Aire}(ijk)} \quad \omega_k(M) = \frac{\text{Aire}(ijM)}{\text{Aire}(ijk)}$$

qui sont les coordonnées barycentriques de M dans le triangle ijk (On a $\omega_i + \omega_j + \omega_k = 1$).

4.2.3 Expression du champ et de ses dérivées

température

$$\theta(M) = [\omega_i \quad \omega_j \quad \omega_k] \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_k \end{bmatrix} = [\omega]^t [\theta]$$

gradient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\theta &= \begin{bmatrix} \theta_{,x} \\ \theta_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [\theta] \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [\omega_i \quad \omega_j \quad \omega_k]}_{[B]} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } [B] &= \begin{bmatrix} \omega_{i,x} & \omega_{j,x} & \omega_{k,x} \\ \omega_{i,y} & \omega_{j,y} & \omega_{k,y} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.2.4 Matrice de conductivité élémentaire

Énergie élémentaire :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} k \overrightarrow{\text{grad}} \theta \overrightarrow{\text{grad}} \theta d\Omega = \frac{1}{2} [\theta]^t [K_e] [\theta] = \frac{1}{2} k [\theta]^t [B]^t [B] [\theta] eA$$

soit

$$\boxed{[K_e] = keA [B]^t [B]}$$

4.2.5 Vecteur des "flux généralisés"

De manière générale, le *travail* extérieur s'exprime sous la forme :

$$\int_{\partial_2 \Omega} h_d(M) \theta dS = [\theta]^t [F_e]$$

Dans le cas simple d'un flux constant, $h_d(M) = cste = h_d$ sur le bord ij on a :

$$\int_{ij} h_d \theta dS = \int_{ij} h_d [\omega]^t [\theta] dl = \int_{ij} h_d [\theta]^t [\omega] dl$$

Donc :

$$[F_e] = \int_{ij} h_d \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{bmatrix} dl \quad \text{avec} \quad \int_{ij} \omega_i dl = \frac{1}{2} \text{long}(ij)$$

Alors :

$$\boxed{[F_e] = \frac{h_d}{2} \text{long}(ij) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

4.3 Utilisation de l'élément

On se pose le problème de conduction thermique suivant. Un domaine rectangulaire $ABCD$ ($AB = 2a$ et $BC = a$) est soumis à un flux h_d sur la paroi DA . Les parois BC et CD sont isolantes et la paroi AB est isotherme à une température imposée θ_d .

La température de référence est de 0 degré et, pour simplifier, on choisit $\theta_d = 0$.

4.3.1 Maillage

On utilise le maillage présenté sur la figure 4.4. Sa table de connectivité est donnée dans le tableau 4.2

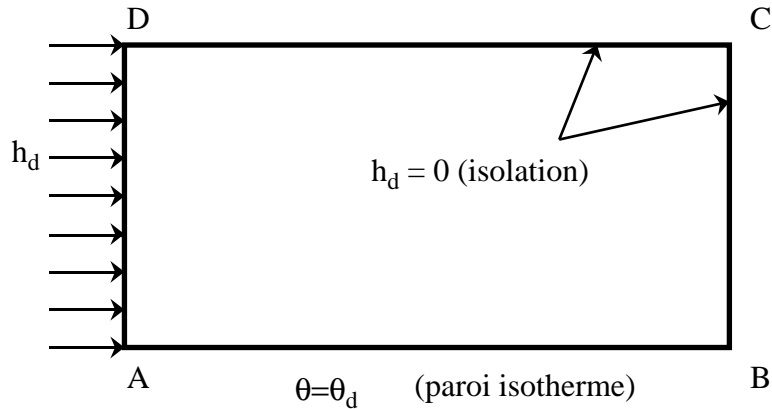


Figure 4.3: Problème de conduction thermique

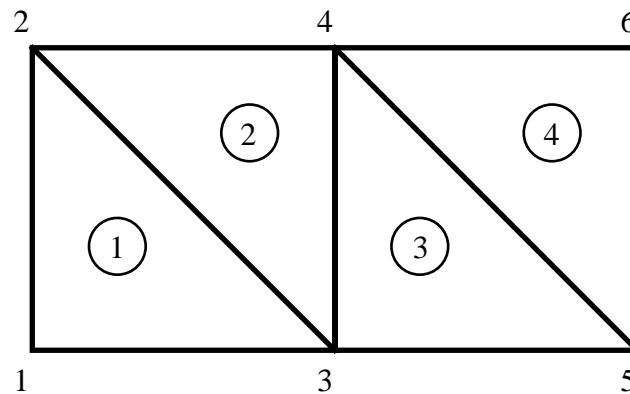


Figure 4.4: Maillage du domaine

4.3.2 Choix de l'élément

On utilise l'élément défini précédemment. Les éléments 1 et 3 sont identiques et ont la même matrice de conductivité élémentaire définie par :

$$[B_{1,3}] = \frac{1}{-a^2} \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ a & -a & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{1,3}] = k \frac{a^2}{2} [B]^t [B] = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Attention, le signe de l'aire provient de l'orientation de l'élément par rapport au sens trigonométrique.

De même, les éléments 2 et 4 sont identiques et ont la même matrice de conductivité élémentaire définie par :

$$[B_{2,4}] = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & -a & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_{2,4}] = k \frac{a^2}{2} [B]^t [B] = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.3.3 Calcul de la matrice de conductivité

Le maillage est défini par le tableau de connectivité 4.2.

élément	nœud i	nœud j	nœud k
1	1	2	3
2	2	3	4
3	3	4	5
4	4	5	6

Table 4.2: Table de connectivité du maillage

On pratique l'assemblage des matrices élémentaires :

$$[K] = \frac{k}{2} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2 & -1 & & -1 & & & \\ -1 & 1+1 & & +0+0 & & 0-1 & \\ -1 & 0+0 & +1+1+2 & & 0-1-1 & & -1 \\ & 0-1 & +0-1-1 & & 2+1+1 & +0+0 & -1 \\ & 0 & & 0-1 & 0+0+0 & +1+1 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{array} \right] \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

Ce qui donne :

$$[K] = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.3.4 Calcul du vecteur des flux généralisés

Le flux est imposé sur l'élément 1 pour lequel on a :

$$[F_{e1}] = \frac{h_d}{2} a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs flux élémentaires sont nuls sur tout les autres éléments.

On pratique l'assemblage des vecteurs élémentaires :

$$[F] = \frac{ah_d}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

4.3.5 Prise en compte des conditions aux limites en température

La condition de température imposée aux nœuds 1, 3 et 5 s'écrit : $\theta_1 = \theta_3 = \theta_5 = 0$. La façon la plus simple de résoudre est de remplacer le système :

$$\frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix} = \frac{ah_d}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

par :

$$\frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{pmatrix} = \frac{ah_d}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3.6 Résolution du système linéaire

Le système a pour solution :

$$\theta_2 = \frac{7}{12} \frac{ah_d}{k} \quad ; \quad \theta_4 = \frac{2}{12} \frac{ah_d}{k} \quad ; \quad \theta_6 = \frac{1}{12} \frac{ah_d}{k}$$

4.3.7 Résolution du système linéaire

La figure 4.5 donne la représentation *éléments finis* du champ $\theta(x)$.

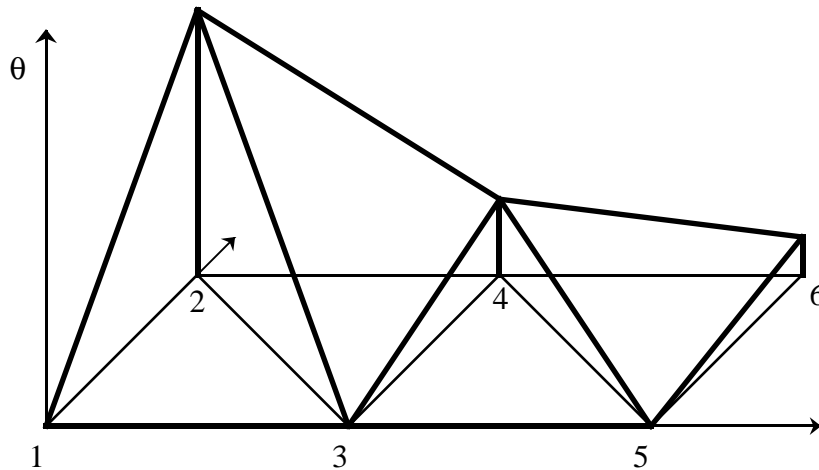


Figure 4.5: Champ de température calculé

4.3.8 Calcul des dérivées sur les éléments

Le vecteur flux de chaleur est calculé élément par élément :

$$\vec{q} = k \overrightarrow{\text{grad}} \theta = k[B][\theta]$$

Par exemple, sur l'élément 1 on a :

$$[B_1] = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\theta] \frac{ah_d}{12k} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$\vec{q}_1 = k \frac{1}{a} \frac{ah_d}{12k} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit

$$\vec{q}_1 = \frac{h_d}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Sur l'élément 2 on a :

$$[B_2] = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\theta] \frac{ah_d}{12k} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

donc

$$\vec{q}_2 = \frac{h_d}{12} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il est intéressant de remarquer que le champ $\vec{q}(x)$ ne vérifie pas les conditions aux limites.

Chapter 5

Quelques points techniques

5.1 Vocabulaire

Quelque soit le type de problème, les inconnues (les q_i) sont dénommées *degrés de liberté* et bien souvent abrégées *d.d.l.*

Les problèmes linéaires couramment rencontrés dans le monde industriel peuvent aller jusqu'à cent ou deux cent mille degrés de liberté. Les applications traitant des problèmes avec un million de ddl commencent à apparaître, d'autant plus facilement que l'usage de calculateurs parallèles se généralise.

5.2 Élément de référence

La plupart du temps, tous les éléments d'un maillage sont différents. Ainsi, les fonctions de bases ne sont pas identiques sur les éléments. De plus, l'intégration des termes de raideur sur un élément de taille et d'orientation quelconque peut être compliquée.

Alors tous les codes éléments finis utilisent la notion d'élément de référence. Il s'agit d'un élément aux formes et dimensions simples, dans un espace de référence, qui est commun à tous les éléments du même type (voir figure 5.1).

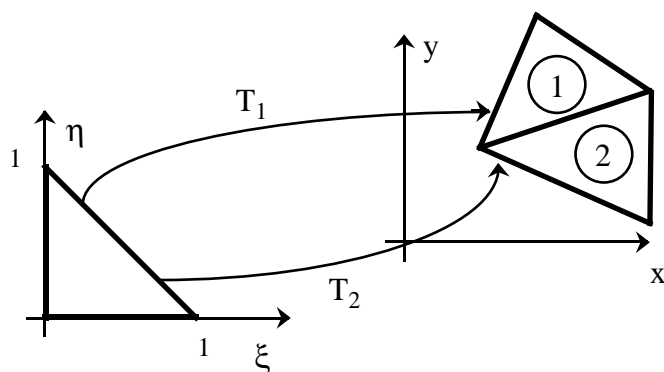


Figure 5.1: Élément de référence et transformation géométrique

Les éléments réels sont définis à partir de l'élément de référence par une transformation géométrique définie par les positions des nœuds dans l'espace réel.

Dans l'espace de référence :

- sont données les fonctions de base. Elles sont alors communes à tous les éléments. Par exemple, pour le triangle à trois nœuds, on aura :

$$\begin{aligned} - \omega_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta) \\ - \omega_2 &= \xi \\ - \omega_3 &= \eta \end{aligned}$$

- sont réalisées les intégrations.

$$\int_{\Omega_e} f(\xi, \eta) dx dy = \int_{\Omega_{ref}} f(\xi, \eta) J_T(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

où J_T est le jacobien de la transformation.

5.3 Intégration numérique

Les termes à intégrer sur les éléments sont des polynômes et sont le plus souvent intégrés numériquement. La méthode générale d'intégration numérique est de remplacer la somme continue par une somme discrète de la manière suivante :

$$\int_{\Omega_{ref}} h(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_p} w_i h(\xi_i, \eta_i)$$

où les (ξ_i, η_i) sont des points particuliers (*points d'intégration*) et les w_i sont les *poids d'intégration*.

La méthode la plus utilisée dans le cadre de la méthode des éléments finis est la méthode de Gauss, pour laquelle les positions et les poids sont déterminés de manière à intégrer exactement un polynôme de degré le plus élevé possible. Dans ce cas, les points d'intégration sont communément appelés *points de Gauss*.

5.3.1 Intégration en dimension un

On intègre de la manière suivante :

$$\int_{-1}^1 h(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_p} w_i h(\xi_i)$$

Les $2n_p$ inconnues ξ_i et Avec n_p w_i sont calculés de manière à intégrer exactement $n + 1$ monômes. La méthode permet donc d'intégrer exactement un polynôme de degré $n = 2n_p - 1$. Quelques jeux de position des points et de poids de Gauss sont donnés dans le tableau 5.1

5.3.2 Intégration en dimension deux

On procède de la même manière en dimension deux pour intégrer :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^{1-\xi} h(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_p} w_i h(\xi_i, \eta_i)$$

La méthode permet alors d'intégrer exactement des polynômes d'ordre n ($\xi^i \eta^j$ avec $i + j \leq n$).

n_p	ξ_i	w_i	n
1	0	2	1
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1	3
3	0 $\pm 1/\sqrt{3/5}$	8/9 5/9	5
4	± 0.3399810435 ± 0.8611363115	0.6521451548 0.3478548451	7

Table 5.1: Intégration numérique de Gauss à une dimension

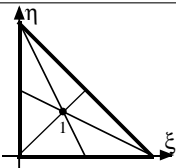
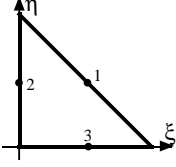
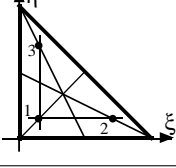
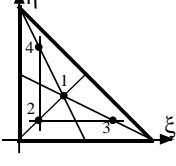
	n_p	ξ_i	η_i	w_i	n
	1	1/3	1/3	1/2	1
	3	1/2 0 1/2	1/2 1/2 0	1/6	2
	3	1/6 2/3 1/6	1/6 1/6 2/3	1/6	2
	4	1/3 1/5 3/5 1/5	1/3 1/5 1/5 3/5	-27/96 25/96 25/96 25/96	3

Table 5.2: Intégration numérique de Gauss sur un triangle

5.4 Calcul des dérivées des fonctions

Le calcul des dérivées des fonctions représentées se fait élément par élément. Les fonctions calculées sont discontinues d'un élément à l'autre. Se pose alors la question des points où exprimer ces dérivées.

Il ne semble pas judicieux d'utiliser les nœuds à cause de la discontinuité entre les éléments en ces points.

La plus part des codes éléments finis utilisent, par choix, les points d'intégration (*points de Gauss*). Ils ont l'avantage d'être situés à l'intérieur des éléments. De plus, ce choix permet un calcul direct de quantités nécessitant une intégration (énergies, moyennes, ...).

5.5 Prise en compte des conditions sur les inconnues

5.5.1 Forme générale des conditions

Le méthode des éléments finis s'appuie sur la minimisation d'une énergie sous des conditions sur les inconnues (déplacements imposés (admissibilité cinématique), température imposée, ...). Nous donnons à ces conditions la forme générale suivante :

$$[C][q] = [\beta]$$

où $[C]$ contient la réduction au zones de liaison considérées et $[\beta]$ les valeurs à imposer.

Par exemple, dans le cas de la figure 5.2, la condition s'écrit sous la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{[q]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u_d \end{bmatrix}}_{[\beta]}$$

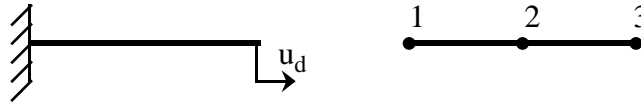


Figure 5.2: Exemple de conditions sur les inconnues

Le problème à résoudre est donc de trouver le vecteur des inconnues $[q]$ tel que :

$$[q] \text{ minimise } E_p([q]) = \frac{1}{2}[q]^t[K][q] - [q]^t[F]$$

$$\text{et vérifie } [C][q] = [\beta]$$

5.5.2 Méthode de pénalisation

Dans cette approche, on minimise la quantité :

$$E_p(q_i) + \frac{g}{2} [[C][q] - [\beta]]^t [[C][q] - [\beta]]$$

ainsi, plus le paramètre scalaire g est grand plus la condition $[C][q] = [\beta]$ est assurée.

Cette approche est simple car elle ne consiste qu'à l'ajout de termes élevés dans le systèmes linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow [[K] + g[C]^t[C]] [q] = [F] + g[C]^t[\beta]$$

Ce n'est pas une méthode exacte car la valeur de g est limité par des problèmes numériques de conditionnement de la matrice du système linéaire.

Si on considère le problème posé sur la figure 5.2, on aura :

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en posant $k = \frac{ES}{L}$, avec L longueur des éléments, S section de la barre et E module d'Young.

On a alors :

$$[C]^t[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [C]^t[\beta] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_d \end{bmatrix}$$

Le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} k+g & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k+g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ gu_d \end{bmatrix}$$

dont la solution est :

$$u_1 = \frac{k}{2(k+g)}u_d \simeq 0 \quad u_2 = \frac{u_d}{2} \quad u_3 = \frac{k+2g}{2(k+g)}u_d \simeq u_d$$

est proche de la solution voulue lorsque g est grand.

5.5.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Dans cette approche, on cherche les extremums de :

$$E_p(q_i) + [\lambda]^t [[C][q] - [\beta]]$$

Ces extremums correspondent à :

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow [K][q] - [F] + [\lambda]^t[C] = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \lambda_i} = 0 \Rightarrow [C][q] - [\beta] = 0$$

donc la condition sur les inconnues est imposée strictement.

Le système linéaire à résoudre devient alors :

$$\begin{bmatrix} [K] & [C]^t \\ [C] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [q] \\ [\lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ [\beta] \end{bmatrix}$$

On peut montrer que les λ_i sont les actions dans les liaisons servant à imposer les conditions sur les inconnues.

Si on considère le problème posé sur la figure 5.2, on aura à résoudre :

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 1 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_d \end{bmatrix}$$

dont la solution est :

$$u_1 = 0 \quad u_2 = \frac{u_d}{2} \quad u_3 = u_d \quad \lambda_1 = \frac{k}{2}u_d \quad \lambda_2 = -\frac{k}{2}u_d$$

qui est la solution voulue. On remarque que les λ_i correspondent, ai signe près, aux efforts à appliquer pour obtenir les déplacements imposés.

5.6 Résolution du système linéaire

Il existe deux grandes classes de méthodes directes de résolution de grand systèmes linéaires qui sont utilisées pour la méthode des éléments finis. Ces sont les méthodes de *Cholesky* et de *Crout*.

5.6.1 Méthode de Cholesky

Cette méthode est adaptée aux matrices symétriques définies positives dont les termes diagonaux sont strictement positifs. Elle consiste à décomposer la matrice $[K]$ sous la forme :

$$[K] = [L]^t[L]$$

où $[L]$ est une matrice triangulaire inversible.

La résolution se fait en deux étapes de la manière suivante :

$$[L][\gamma] = [F] \quad (\textit{montee})$$

$$[L]^t[q] = [\gamma] \quad (\textit{descente})$$

Les avantages de cette approche sont les suivants :

- La matrice $[L]$ a la même taille que la matrice $[K]$ assemblée et peut donc être stockée numériquement à sa place.
- La méthode est adaptée aux multi-résolutions (plusieurs seconds membres) qui sont nécessaires lorsqu'il y a changement des conditions au limites en effort ou modification des valeurs imposées des inconnues.

5.6.2 Méthode de Crout

Cette méthode est adaptée aux matrices obtenue lorsque les conditions sur les inconnues sont traitées par la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$[A] = \begin{bmatrix} [K] & [C]^t \\ [C] & [0] \end{bmatrix}$$

où $[K]$ est symétrique définie positive et $[C]$ est rectangulaire et injective. Elle consiste à décomposer la matrice $[A]$ sous la forme :

$$[A] = [L]^t[D][L]$$

où $[L]$ est une matrice triangulaire inversible à diagonale unité et $[D]$ est une matrice diagonale dont les termes sont non nuls.

La résolution se fait d'une manière similaire à celle de Cholesky et l'approche est aussi adaptée aux multi-résolutions.

5.7 Stockage des matrices

Les matrices de rigidité utilisées par la méthode sont symétriques et ont bien souvent un profil de bande. Après assemblage, il est bien évident que la totalité de la matrice n'est pas stockée. Il existe différentes méthodes pour stocker la matrice ou ses décompositions.

5.7.1 Stockage symétrique

On stocke les $N(N + 1)/2$ termes d'une triangulaire :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 10 \\ & 3 & 9 & 1 & 12 \\ & & 6 & 20 & 2 \\ & & & 7 & 9 \\ & & & & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ -7 \end{bmatrix}$$

5.7.2 Stockage symétrique bande

On stocke toutes les bandes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & & \\ & 3 & 9 & 0 & \\ & & 6 & 20 & 2 \\ & & & 7 & 9 \\ & & & & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ -7 \end{bmatrix}$$

5.7.3 Stockage symétrique profil ("skyline")

On stocke les termes des bandes ainsi que la position des termes diagonaux:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & & 6 & & \\ & 3 & 4 & 7 & & \\ & & 5 & 8 & & \\ & & & 9 & 10 & \\ & & & & 11 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 11 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Part II

Résolution des problèmes en temps

Chapter 6

Discrétisation temporelle

6.1 Représentation des fonctions du temps

On a vu dans le chapitre précédent que les méthodes d'approximation en espace conduisent à représenter les fonctions sous la forme :

$$f(M) = q_i \omega_i(M) ; M \in \Omega$$

Lorsqu'on traite des problèmes d'évolution on cherche des solutions sous la forme $f(M, t)$. L'approximation en espace consiste généralement à chercher ces fonctions sous la forme :

$$f(M, t) = q_i(t) \omega_i(M) ; M \in \Omega ; t \in [0, T]$$

Il se pose pour la représentation des fonctions du temps $q_i(t)$ les mêmes problèmes que pour la représentation des fonctions d'espace.

Des méthodes de représentation de type éléments finis à la fois pour l'espace et le temps existent, mais la méthode générale consiste à représenter les fonctions du temps par leurs valeurs à des instants particuliers appelés *piquets de temps*. L'intervalle $[0, T]$ est divisé en h intervalles identiques et on appelle *pas de temps* la quantité :

$$\Delta t = \frac{T}{h}$$

Les piquets de temps sont alors définis par :

$$t_k = k \Delta t = k \frac{T}{h} ; k = 1, h$$

La quantité de variables scalaires à stocker pour représenter la fonction $f(M, t)$ est donc $N \times h$, où N est le nombre de degrés de liberté et h le nombre de piquets de temps.

Pour la suite, on utilise la notation suivante :

$$q(t = t_k) = q^k$$

Par abus de langage, on confond la notion d'instant et la notion de piquet de temps : on appelle instants les piquets de temps où sont calculées les solutions.

6.2 Schéma d'intégration

On appelle *schéma d'intégration*, la relation qui lie les variables recherchées à un instant donné aux variables supposées connues aux instants précédents :

$$\begin{aligned} q^t &= f(q^{t-1}, \dot{q}^{t-1}, \ddot{q}^{t-1}, \dots, q^{t-2}, \dot{q}^{t-2}, \ddot{q}^{t-2}, \dots) \\ \dot{q}^t &= g(q^{t-1}, \dot{q}^{t-1}, \ddot{q}^{t-1}, \dots, q^{t-2}, \dot{q}^{t-2}, \ddot{q}^{t-2}, \dots) \\ \ddot{q}^t &= h(q^{t-1}, \dot{q}^{t-1}, \ddot{q}^{t-1}, \dots, q^{t-2}, \dot{q}^{t-2}, \ddot{q}^{t-2}, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

On appelle schéma d'intégration à *un pas*, un schéma qui lie les variables cherchées uniquement aux variables connues à l'instant précédent.

6.3 Types de problèmes

Les problèmes d'évolution considérés sont formulés par un système d'équations aux dérivées partielles en temps et en espace avec des conditions aux limites (espace) et des conditions initiales (temps).

La dépendance en temps de la solution peut provenir de l'existence de termes de vitesse ou d'accélération :

- dans l'équation d'équilibre :

- $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$, en solide,
- $\operatorname{div} \vec{q} = c \frac{\partial \theta}{\partial t}$, en thermique,
- ...

- dans le comportement :

- $\underline{\underline{\sigma}} = A \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) + B \underline{\underline{\epsilon}}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)$, viscoélasticité,
- ...

Dans ce chapitre concernant le temps, nous considérons d'abord les problèmes du premier ordre en temps (équation différentielles du premier ordre par rapport au temps) puis les problèmes du second ordre. Dans la dernière partie, nous nous intéressons à la recherche de solutions harmoniques.

Chapter 7

Problèmes en temps : premier ordre

7.1 Exemple : viscoélasticité

On considère un problème quasistatique de viscoélasticité linéaire pour un matériau de type Kelvin Voight. La loi du comportement est du type :

$$\underline{\underline{\sigma}} = A\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) + B\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\dot{\vec{u}}) \quad \text{avec } \dot{\vec{u}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

avec la condition initiale :

$$\vec{u}(M, t)_{t=0} = \vec{u}_0$$

L'énergie de déformation prend alors la forme :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} A\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} B\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\dot{\vec{u}}) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\dot{\vec{u}}) d\Omega$$

Après la discrétisation en espace :

$$\vec{u}(M) = q_i(t)\vec{\omega}_i(M) \quad \text{et} \quad \dot{\vec{u}}(M) = \dot{q}_i(t)\vec{\omega}_i(M) \quad (i = 1 \dots N)$$

L'énergie de déformation devient :

$$E_d(\vec{u}) = \frac{1}{2} q_i(t) \left(\int_{\Omega} A\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_i) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\omega}_j) d\Omega \right) q_j(t) + \frac{1}{2} q_i(t) \left(\int_{\Omega} B\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{\omega}_i) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{\omega}_j) d\Omega \right) \dot{q}_j(t)$$

qui s'écrit :

$$E_d(\vec{u}_a) = \frac{1}{2} [q(t)]^T [C] [\dot{q}(t)] + \frac{1}{2} [q(t)]^T [K] [q(t)]$$

où $[C]$ est la matrice d'amortissement qui contient les termes de viscosité.

Les conditions initiales s'écrivent sous la forme :

$$q_i(t)_{t=0} = q_{i0} \quad \text{soit} \quad [q(t)]_0 = [q_0]$$

Après minimisation, le système à résoudre devient :

$$[C][\dot{q}(t)] + [K][q(t)] = [F(t)]$$

Il s'agit d'un système différentiel du premier ordre de taille N . Il existe de très nombreuses méthodes pour résoudre ce type de problème. Parmi elles, il existe deux grandes catégories : Les méthodes explicites et les méthodes implicites.

Après application d'une discrétisation en temps, ces schémas numériques donnent un lien entre le calcul de la fonction à un instant t_i et sa valeur aux instants précédents. Nous nous limiterons aux méthodes à un pas pour lesquels le calcul ne dépend que des valeurs à l'instant précédent.

7.2 Résolution explicite

7.2.1 Généralités

Par exemple, on cherche la solution $x(t)$ du problème :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad x(t=0) = x_0,$$

le schéma d'intégration d'*Euler explicite* est défini par la relation suivante :

$$\boxed{\dot{x}^k = \frac{x^{k+1} - x^k}{\Delta t}}$$

Ainsi, lorsqu'on écrit le problème à l'instant t_k et qu'on applique le schéma, on obtient une expression explicite de l'inconnue à l'instant t_{k+1} en fonction des données du pas précédent :

$$x^{k+1} = x^k + \Delta t f(x^k, t_k)$$

7.2.2 Utilisation

Dans l'exemple précédent de viscoélasticité, le schéma d'*Euler explicite* s'écrit :

$$[\dot{q}^k] = \frac{1}{\Delta t} ([q^{k+1}] - [q^k])$$

On l'applique à l'équation d'équilibre à l'instant t_k :

$$[C][\dot{q}^k] + [K][q^k] = [F^k]$$

et on obtient :

$$[C][q^{k+1}] = ([C] - \Delta t[K])[q^k] + \Delta t[F^k]$$

On a une expression quasi-explicite des inconnues nodales à l'instant t_{k+1} , surtout dans le cas où $[C]$ est diagonalisable.

7.3 Résolution implicite

7.3.1 Généralités

Par exemple, on cherche la solution $x(t)$ du problème :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad x(t=0) = x_0,$$

le schéma d'intégration d'*Euler implicite* est défini par la relation suivante :

$$\dot{x}^{k+1} = \frac{x^{k+1} - x^k}{\Delta t}$$

Ainsi, lorsqu'on le problème à l'instant t_{k+1} et qu'on applique le schéma, l'expression de l'inconnue à l'instant t_{k+1} n'est pas explicite. Elle nécessite la résolution d'un problème dont la complexité dépend de $f(x, t)$:

$$x^{k+1} - \Delta t f(x^{k+1}, t_{k+1}) = x^k$$

7.3.2 Utilisation

Dans l'exemple précédent de viscoélasticité, le schéma d'*Euler implicite* s'écrit :

$$[\dot{q}^{k+1}] = \frac{1}{\Delta t} ([q^{k+1}] - [q^k])$$

On l'applique à l'équation d'équilibre à l'instant t_{k+1} :

$$[C][\dot{q}^{k+1}] + [K][q^{k+1}] = [F^{k+1}]$$

et on obtient :

$$([C] + \Delta t[K])[q^{k+1}] = ([C][q^k] + \Delta t[F^{k+1}])$$

Il faut alors résoudre un système linéaire à chaque pas de temps pour obtenir les inconnues nodales à l'instant t_{k+1} .

Chapter 8

Problèmes en temps : deuxième ordre

8.1 Exemple : dynamique du solide

Si on considère un problème de dynamique du solide élastique, l'équation d'équilibre local devient :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f}_d = \rho \ddot{\vec{u}} \quad \forall M \in \Omega \quad , \forall t \in [0, T]$$

L'énergie à minimiser prend alors la forme :

$$E(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{u}} \vec{u} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f}_d \vec{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{F}_d \vec{u} dS$$

Après la discrétisation en espace :

$$\vec{u}(M) = q_i(t) \vec{\omega}_i(M) \text{ et } \ddot{\vec{u}}(M) = \ddot{q}_i(t) \vec{\omega}_i(M) \quad (i = 1 \dots N)$$

et après minimisation, le système à résoudre devient :

$$[M][\ddot{q}(t)] + [K][q(t)] = [F(t)]$$

Il s'agit d'un système différentiel linéaire du deuxième ordre à N inconnues et à coefficients constants. Il est du même type que ceux rencontrés lors de l'analyse dynamique de systèmes discrets du type *masse-ressorts*. $[M]$ est appelée *matrice de masse* et est définie par :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \rho \vec{\omega}_i(M) \vec{\omega}_j(M) d\Omega$$

Si on considère de plus un matériau viscoélastique l'équation différentielle devient :

$$[M][\ddot{q}(t)] + [C][\dot{q}(t)] + [K][q(t)] = [F(t)]$$

mais nous ne nous intéresserons pas à ce type de problèmes.

8.2 Détermination de la solution transitoire

8.2.1 Généralités

De même que pour les systèmes du premier ordre, il existe un grand nombre de schémas d'intégration. Ici encore est faite la distinction entre schémas explicites et schémas implicites. Nous ne considérerons ici qu'un exemple simple de chacun des types de schéma.

8.2.2 Résolution explicite

Le schéma d'*Euler explicite* étendu au second ordre s'écrit :

$$\boxed{[\ddot{q}^{k-1}] = \frac{1}{\Delta t^2}([q^{k+1}] - 2[q^k] + [q^{k-1}])}$$

On l'applique à l'équation d'équilibre à l'instant t_{k-1} :

$$[M][\ddot{q}^{k-1}] + [K][q^{k-1}] = [F^{k-1}]$$

et on obtient :

$$[M][q^{k+1}] = 2[M][q^k] - ([M] + \Delta t^2[K])[q^{k-1}] + \Delta t^2[F^{k-1}]$$

On a une expression explicite des inconnues nodales à l'instant t_{k+1} , car $[M]$ peut être simplement diagonalisée par concentration des masses aux nœuds.

8.2.3 Résolution implicite

Le schéma d'*Euler implicite* étendu au second ordre s'écrit :

$$\boxed{[\ddot{q}^{k+1}] = \frac{1}{\Delta t^2}([q^{k+1}] - 2[q^k] + [q^{k-1}])}$$

On l'applique à l'équation d'équilibre à l'instant t_{k+1} :

$$[M][\ddot{q}^{k+1}] + [K][q^{k+1}] = [F^{k+1}]$$

et on obtient :

$$([M] + \Delta t^2[K])[q^{k+1}] = 2[M][q^k] - [M][q^{k-1}] + \Delta t^2[F^{k+1}]$$

Les inconnues nodales à l'instant t_{k+1} sont alors obtenues par résolution d'un système linéaire.

8.2.4 Utilisation des différents schémas

Certain de ces schémas d'intégration sont soumis à des conditions sur la taille du pas de temps assurant la stabilité du schéma. Ceci est particulièrement vrai pour les schémas explicites. La stabilité de ces schémas n'est assurée que lorsque le pas de temps Δt est plus petit que le temps nécessaire pour qu'une onde traverse un élément. Le critère de choix du pas de temps est de la forme :

$$\Delta t \leq \frac{\ell}{c}$$

où ℓ est la taille du plus petit élément du maillage et c est la célérité des ondes longitudinales dans le matériau. Cette condition de stabilité est appelée *condition de Courant*. Il va sans dire qu'avec un tel critère, le nombre de piquets de temps peut devenir très important lorsque le maillage est fin.

On distingue alors deux classes de problèmes du deuxième ordre :

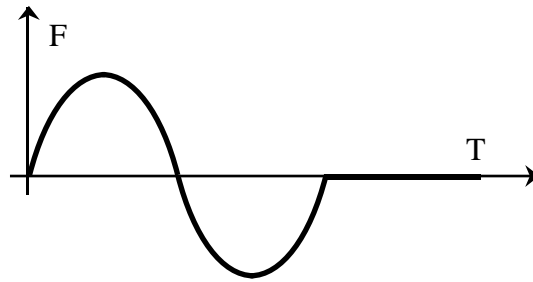


Figure 8.1: Chargement lent

- Les problèmes *lents*, caractérisés par des temps de chargement longs par rapport à la durée de l'étude (figure 8.1). Un petit nombre de pas de temps est nécessaire à la fois à la description des variations du chargement et à la description de la solution. Pour ces problèmes, on préférera utiliser les schémas *implicites* pour profiter de leurs caractéristiques de stabilité.

Dans le domaine de la dynamique des solides, ce type de problème sera plutôt du genre choc lent, ou propagation d'ondes lentes.

- Les problèmes *rapides*, caractérisés par des temps de chargement courts par rapport à la durée de l'étude (figure 8.2). Il est alors obligatoire d'utiliser un grand nombre de pas de temps pour représenter les variations du chargement. Les schémas implicites deviennent alors trop coûteux et on leur préférera les schémas *explicites* (la taille du pas de temps n'étant sans doute pas trop éloignée de celle assurant la stabilité).

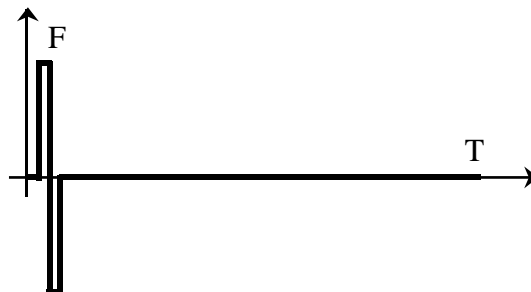


Figure 8.2: Chargement rapide

Dans le domaine de la dynamique des solides, ce type de problème sera plutôt du genre choc *crash*.

8.3 Solution du problème homogène

8.3.1 Modes propres

On cherche les solutions du problème homogène :

$$[M][\ddot{q}(t)] + [K][q(t)] = 0,$$

sous la forme :

$$[q(t)] = [\tilde{q}]e^{i\omega t}$$

C'est-à-dire qu'on cherche tous les couples $(\omega_j, [\tilde{q}_j])$ tels que :

$$([K] - \omega^2[M])[\tilde{q}] = 0$$

Les ω_j sont les pulsations propres du système et les $[\tilde{q}_j]$ sont les modes propres associés. $[M]$ étant une matrice $(N \times N)$ symétrique, définie et positive, elle peut être factorisée par la méthode de Cholesky sous la forme :

$$[M] = [L][L]^t$$

où $[L]$ est une matrice triangulaire.

On peut alors réécrire le problème précédent sous la forme du problème aux valeurs propres :

$$[A][X] = \lambda[X]$$

en posant :

$$[A] = [L]^{-1}[K][L]^{-t} \quad ; \quad \lambda = \omega^2 \quad ; \quad [X] = [L]^t[\tilde{q}]$$

La matrice $[M]$ étant une matrice $(N \times N)$ symétrique, définie et positive, elle a donc N valeurs propres λ_j associées aux N vecteurs propres $[X_j]$. Elles donnent les pulsations propres du système et les modes propres associés :

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j} \quad ; \quad [\tilde{q}_j] = [L]^{-t}[X_j]$$

8.3.2 Approche par la méthode de Rayleigh-Ritz

Le cours de vibrations de maîtrise a introduit la méthode de Rayleigh-Ritz pour l'approximation des modes et fréquences propres d'un système continu. De même que pour la méthode de Ritz, la méthode de Rayleigh-Ritz est basée sur l'utilisation de fonctions de base définies analytiquement sur tout le domaine.

L'utilisation d'une base de fonctions de type éléments finis dans la méthode de Rayleigh-Ritz conduit au problème aux valeurs propres du paragraphe précédent. En effet, le quotient de Rayleigh est :

$$R([q]) = \omega^2 = \frac{[\tilde{q}]^t[K][\tilde{q}]}{[\tilde{q}]^t[M][\tilde{q}]}$$

et en écrivant que la solution minimise ce quotient, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R([q])}{\partial [q]} &= \frac{[K][\tilde{q}] \cdot [\tilde{q}]^t[M][\tilde{q}] - [\tilde{q}]^t[K][\tilde{q}] \cdot [M][\tilde{q}]}{([\tilde{q}]^t[M][\tilde{q}])^2} = 0 \\ \frac{[K][\tilde{q}]}{[\tilde{q}]^t[M][\tilde{q}]} - \frac{[\tilde{q}]^t[K][\tilde{q}]}{[\tilde{q}]^t[M][\tilde{q}]} \frac{[M][\tilde{q}]}{[\tilde{q}]^t[M][\tilde{q}]} &= 0 = \frac{[K][\tilde{q}] - \omega^2[M][\tilde{q}]}{[\tilde{q}]^t[M][\tilde{q}]} \end{aligned}$$

soit le problème aux valeurs propres

$$([K] - \omega^2[M])[\tilde{q}] = 0$$

8.3.3 Utilisation pratique

La recherche des fréquences et modes propres est numériquement très couteuse. Mais, dans la pratique, on ne recherche jamais tous les modes de vibration. On se limite aux quelques premiers modes (les $N/10$ premiers, par exemple). En effet, les modes d'ordres élevés sont associés à des phénomènes à petite longueur d'onde qu'il paraît difficile de représenter lorsque la longueur d'onde est plus petite que la taille d'un élément. Ce phénomène est illustré sur la figure 8.3 qui donne les quatre premiers modes de flexion d'une poutre. On montre clairement que, pour quatre éléments, il est délicat de représenter plus que les deux ou trois premiers modes.

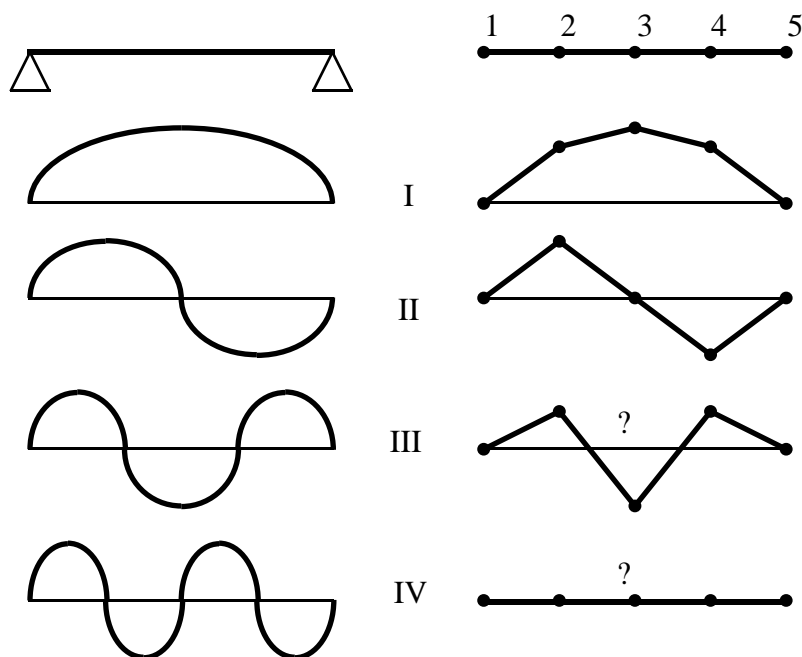


Figure 8.3: Quatre premiers modes de flexion d'une poutre

8.4 Analyse modale

On peut montrer que les modes de vibration de la structure forment une base. Il peut paraître intéressant de chercher la solution en temps du problème sous forme d'une approximation par projection sur la base des quelques premiers modes propres :

$$[q(t)] = a_p(t)[\tilde{q}_p] \quad p = 1 \dots m, \quad m \ll N$$

La recherche de $[q(t)]$, c'est-à-dire de N fonctions du temps scalaires, est remplacée par la recherche de quelques fonctions du temps scalaires $a_p(t)$. Lorsqu'on dispose déjà des premiers modes et lorsque le nombre N de degrés de liberté est important, cette approche peut s'avérer particulièrement efficace.

Par ailleurs, lorsque les modes sont associés à des mouvements simples de la structure, il peut être facile d'imaginer le nombre de modes à utiliser pour représenter le phénomène. Par exemple, sur la figure 8.4, il est clair que seul le mode *I* est nécessaire à la représentation de la

solution du premier problème (flexion) et que le mode I seul ne permet pas la représentation de la solution du deuxième problème (torsion).

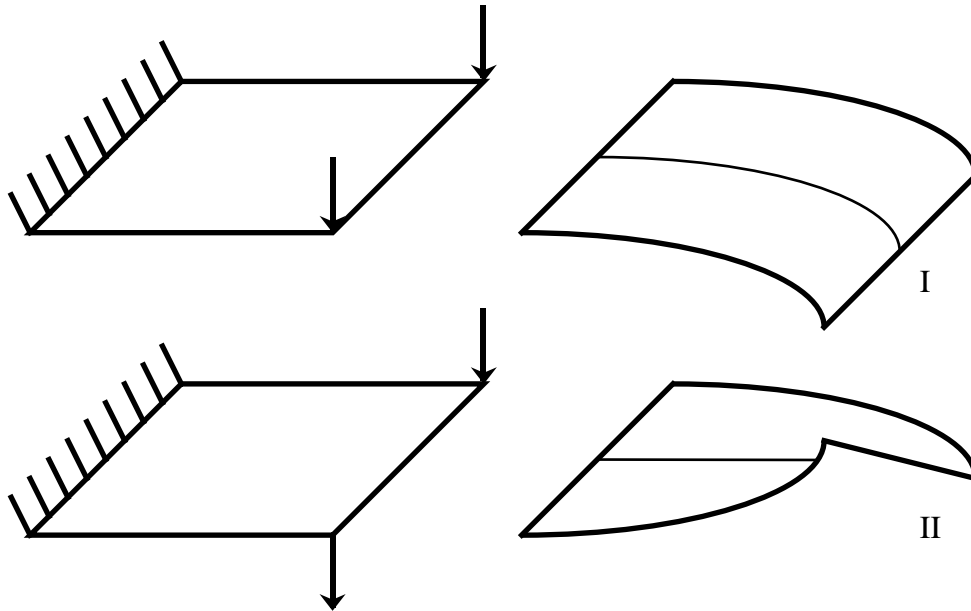


Figure 8.4: deux premiers modes de vibration d'une plaque encadrée