



Méthodes d'Approximation de Solution pour les Problèmes de Physique.*

L. CHAMPANEY

Résumé

Ces notes de cours présentent les grandes méthodes d'approximation de solution utilisées dans la résolution approchée de problèmes de la physique, de la mécanique et des sciences pour l'ingénieur. Le principe général de l'approximation de solution est tout d'abord exposé. Ensuite, la méthode des résidus pondérés, la méthode de Galerkin, la méthode de Ritz et la méthode des Eléments Finis sont brièvement exposées et illustrées chacune par un exemple.

Sommaire

1	Introduction	2	4.1	Formulation forte/faible	13
1.1	Problème type	2	4.2	Mise en oeuvre	13
1.2	Problème linéaire	2	4.3	Exemple	13
2	Approximation de solutions	3	5	Minimisation de Fonctionnelle	15
2.1	Forme générale	3	5.1	Principe	15
2.2	Approximation polynomiale	3	5.2	Méthode de Ritz	15
2.3	Approximation Eléments Finis	4	5.3	Exemple	16
3	Méthode des Résidus Pondérés	7	5.4	Obtention de la fonctionnelle	19
3.1	Formulation Intégrale Normale	7	5.5	Conclusions	20
3.2	Méthode des résidus pondérés	8	6	Méthode des Eléments Finis	21
3.3	Méthode de Galerkin	9	6.1	Intérêts	21
3.4	Exemple	10	6.2	Mise en oeuvre	23
4	Formulation Faible	13	6.3	Exemple 1D	24
			7	Conclusions	31

*Notes de cours du module MP3 "Méthodes Numériques", Maîtrises de de Physique et de Mécanique

1 Introduction

1.1 Problème type

On considère un problème de physique posé sur un domaine Ω dont le bord est Γ (figure 1). On suppose que la recherche de la solution se ramène à la recherche de la fonction vectorielle $\underline{u}(\underline{x})$ définie sur Ω .

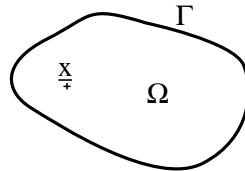


FIG. 1 – *Domaine d'étude*

On suppose que les équations d'équilibre ou de conservation se ramènent à l'équation aux dérivées partielles pouvant s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{L}(\underline{u}) = \underline{g} \quad , \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1.1)$$

où \mathbf{L} est un opérateur différentiel qui est en général scalaire ou vectoriel. Cette équation de conservation est associée aux conditions aux limites condensées sous la forme :

$$\mathbf{B}(\underline{u}) = \underline{h} \quad , \quad \forall \underline{x} \in \Gamma \quad (1.2)$$

où \mathbf{B} est lui aussi un opérateur différentiel qui peut être scalaire ou vectoriel. Il peut correspondre à plusieurs conditions aux limites de natures différentes appliquées sur des morceaux différents de la frontière.

De manière générale, la solution du problème existe dans un espace de dimension infinie. C'est-à-dire qu'il peut être nécessaire de fournir une infinité d'informations scalaires pour représenter la solution (autant qu'il y a de points dans le domaine).

1.2 Problème linéaire

Dans la plupart des exemples étudiés ici, le problème est *linéaire*, c'est à dire que les opérateurs \mathbf{L} et \mathbf{B} sont linéaires :

$$\mathbf{L}(\alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2) = \alpha_1 \mathbf{L}(\underline{u}_1) + \alpha_2 \mathbf{L}(\underline{u}_2), \quad (1.3)$$

et

$$\mathbf{B}(\alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2) = \alpha_1 \mathbf{B}(\underline{u}_1) + \alpha_2 \mathbf{B}(\underline{u}_2). \quad (1.4)$$

2 Approximation de solutions

2.1 Forme générale

La méthode générale de représentation approchée de la fonction cherchée propose de la représenter par sa projection dans un sous-espace de dimension finie $N + 1$ dont une base est définie par les $N + 1$ fonctions $\underline{\phi}_i(\underline{x})$:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=0}^N q_i \underline{\phi}_i(\underline{x}) \quad (2.1)$$

Les composantes scalaires q_i deviennent les inconnues du problème et les *fonctions de base* $\underline{\phi}_i(\underline{x})$ sont choisies *a priori* en fonction de la connaissance qu'on peut avoir de la forme de la solution \underline{u} recherchée.

Les méthodes de résolution d'un problème physique par approximation de solution sont donc des techniques qui permettent le calcul des composantes q_i de la solution approchée dans le sous espace de recherche. Il est bien évident que si la solution exacte du problème appartient à ce sous-espace, la technique de calcul des composantes q_i se doit de donner la solution exacte.

Remarque : Dans la pratique, on peut combiner les méthodes d'approximation de solution avec les méthodes d'approximation d'équation en ne pratiquant l'approximation de solution que sur une partie seulement des variables, par exemple :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{i=0}^N q_i(t) \underline{\phi}_i(\underline{x}) \quad (2.2)$$

□

On considère ci-après deux exemples unidimensionnels et un exemple bidimensionnel d'approximations. En 1D, l'approximation s'écrit.

$$u(x) = \sum_{i=0}^N q_i \phi_i(x) \quad (2.3)$$

2.2 Approximation polynomiale

L'approximation polynomiale consiste à choisir comme fonctions de base les monômes simples :

$$\phi_0(x) = 1 \quad ; \quad \phi_1(x) = x \quad ; \quad \phi_2(x) = x^2 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \phi_N(x) = x^N$$

qui permettent de générer tous les polynômes de degré N :

$$u(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_N x^N$$

La figure 2 présente une approximation polynomiale quadratique ($N = 2$) d'une fonction polynomiale cubique. On comprend que ces approximations ne sont efficaces que pour les

solutions présentant des variations lentes bien réparties dans le domaine d'étude à moins d'utiliser un nombre très important de fonctions. Par ailleurs, si la fonction à approximer présente une variation rapide dans une partie du domaine d'étude et plus lente ailleurs, il est clair que l'approximation polynomiale est peu efficace.

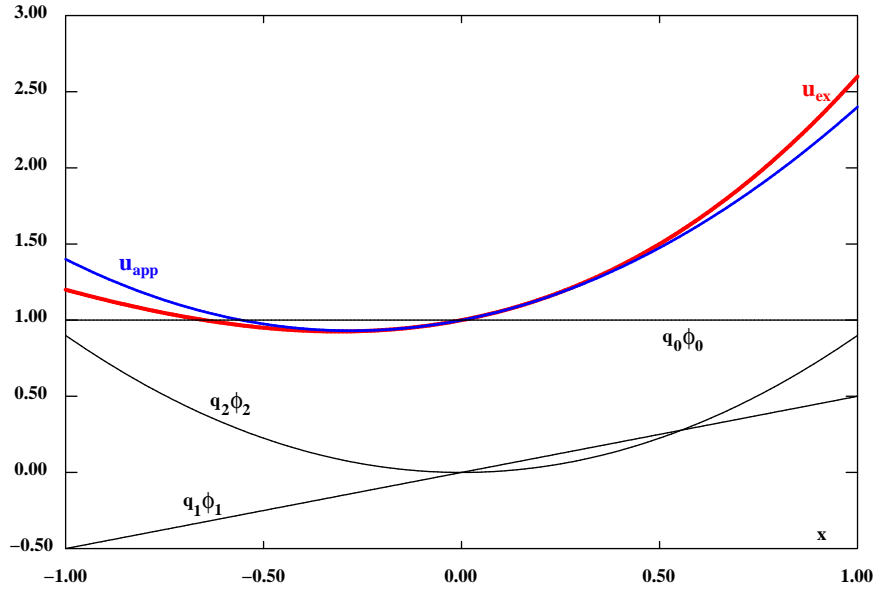


FIG. 2 – Approximation polynomiale quadratique d'un polynôme cubique

2.3 Approximation Éléments Finis

2.3.1 Approximation Éléments Finis 1D

Pour palier ce problème les fonctions d'interpolation dite *de type éléments finis* ont été introduites. Le principe est d'utiliser des fonctions à variation simple (linéaire ou quadratique) définies par morceaux, à support compact et à valeur non nulle autour de certains points particuliers seulement. Ces points sont appelés *points d'interpolation*. La figure 3 présente une base de fonctions linéaires avec 7 points équi-répartis.

Par exemple, pour une base de $N + 1$ fonctions linéaires, on définit les points d'interpolation $P_i (i = 0, \dots, N)$ de positions x_i et la i -ème fonction $\phi_i(x)$ est définie par :

$$\begin{cases} \phi_i(x_i) = 1 \\ \phi_i(x_j) = 0 \\ \phi_i(x) \text{ linéaire} \end{cases} \quad (2.4)$$

On constate facilement que l'approximation $u(x) = q_i \phi_i(x) (i = 0, \dots, N)$ est telle que $u(x_i) = q_i$. C'est à dire que le paramètre q_i représente la valeur de la fonction au point d'interpolation P_i .

La figure 4 présente une approximation éléments finis linéaire à 5 points de la même fonction polynomiale cubique que celle approchée par des polynômes sur la figure 2.

Il est bien évident qu'entre deux points, l'interpolation n'est pas de bonne qualité mais la simplicité des fonctions utilisées permet d'augmenter facilement de nombre de points. Le

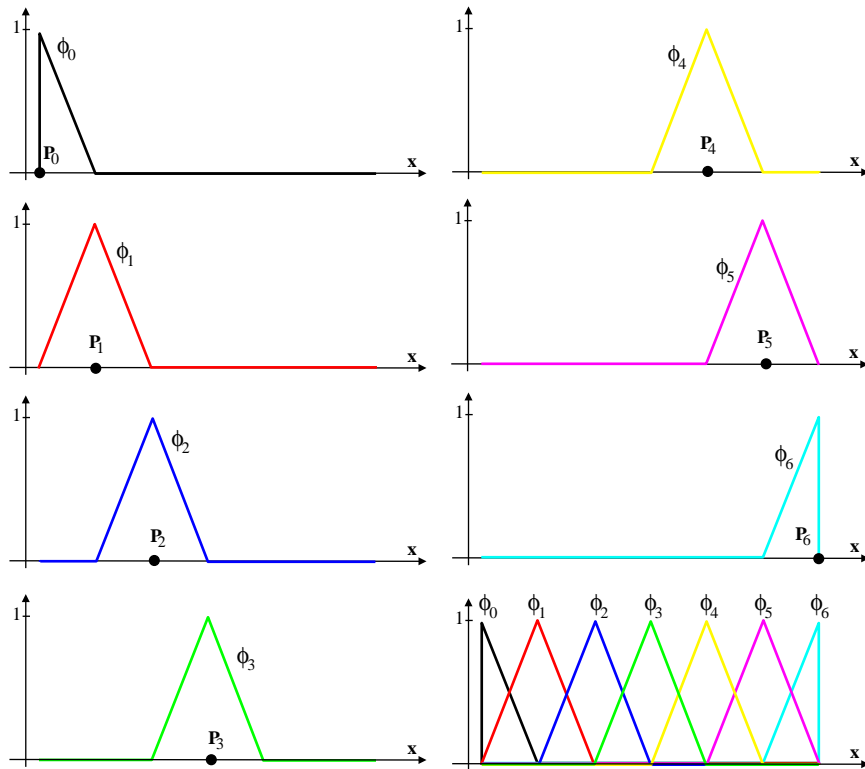


FIG. 3 – Fonctions d'interpolation éléments finis

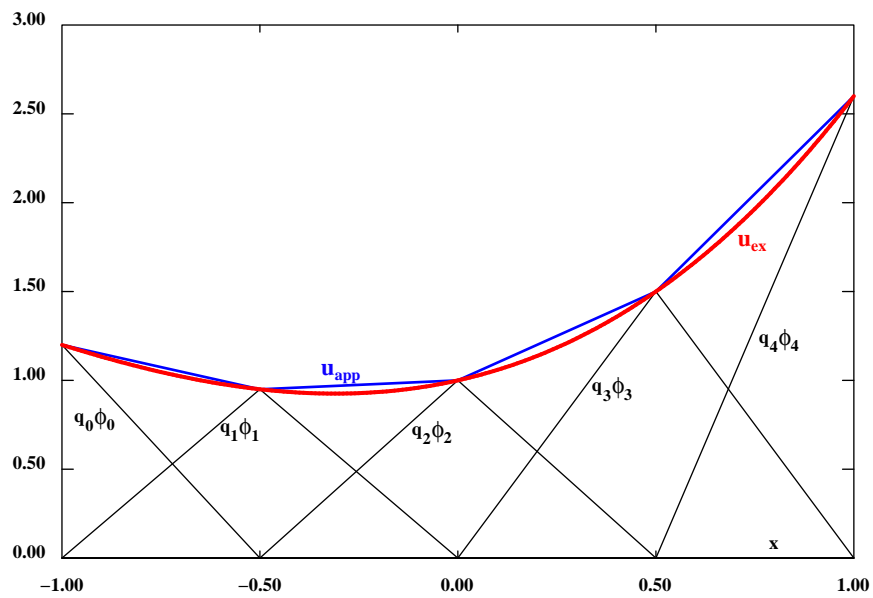


FIG. 4 – Approximation éléments finis linéaire d'un polynôme cubique

deuxième intérêt de ce type d'approximation est la possibilité de répartir les points d'interpolation dans le domaine d'étude pour approcher au mieux une fonction présentant des disparités de variation. Par exemple, la figure 5 présente une approximation de type éléments finis d'une fonction présentant une forte pente à gauche et plus lente à droite. Les points d'interpolation sont répartis au mieux afin de bien représenter la fonction.

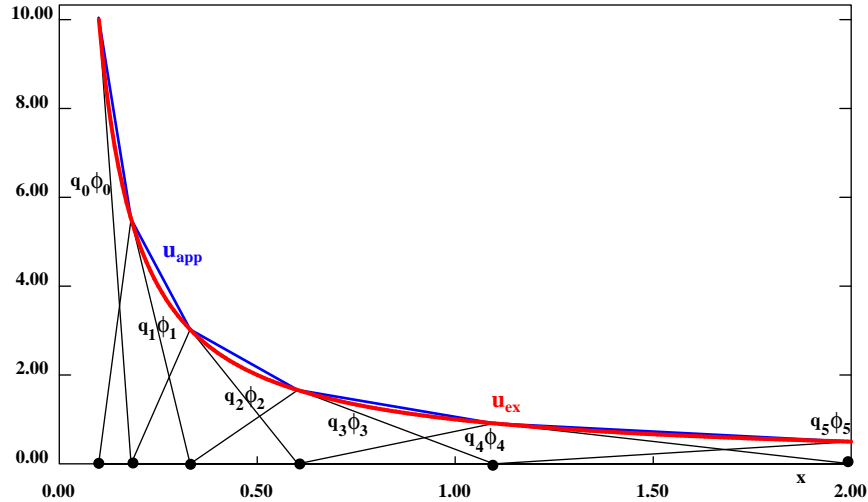


FIG. 5 – Approximation éléments finis linéaire adaptée d'une fonction hyperbolique

2.3.2 Approximation Éléments Finis 2D

En dimension deux, on procède de la même manière. Le domaine considéré est couvert de points d'interpolation. Les fonctions de base utilisées sont définies comme en dimension un et vérifient donc les relations (2.4). La figure 6 présente un exemple de quelques fonctions de base sur un domaine en utilisant 8 points d'interpolation.

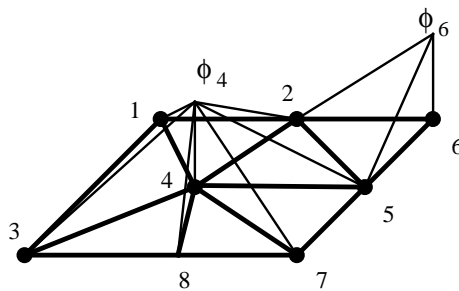
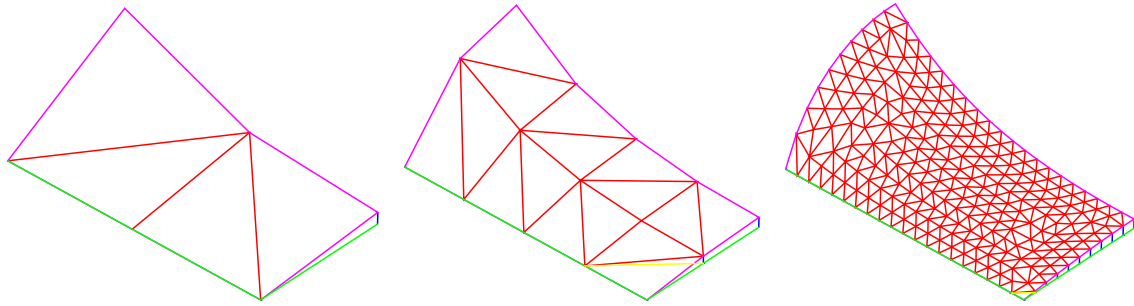


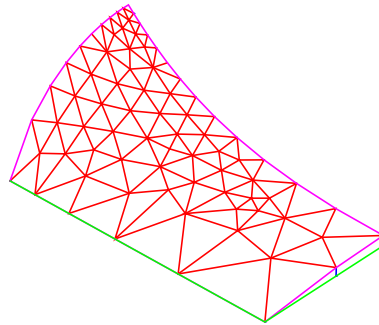
FIG. 6 – Approximation Éléments Finis 2D: fonctions de base

La définition de ces fonctions de base ne peut se faire par la seule donnée des points d'interpolation. Il faut aussi définir une triangulation du domaine entre les points. Cette couverture du domaine par des triangles est appelée *maillage* du domaine. Par extension, on appelle maillage du domaine 1D l'ensemble des segments situés entre les points d'interpolation.

La figure 7 présente trois approximations de type Éléments Finis d'une même fonction à l'aide de maillages plus ou moins raffinés.

FIG. 7 – *Approximations Éléments Finis 2D uniformes*

La figure 8 présente une approximation de la même fonction à l'aide d'un maillage adapté en tenant compte des variations de la fonction.

FIG. 8 – *Approximation Éléments Finis 2D adaptée*

3 Méthode des Résidus Pondérés

3.1 Formulation Intégrale Normale

On appelle *résidu des équations d'équilibre* la quantité :

$$R(\underline{x}) = \mathbf{L}(\underline{u}) - \underline{g} \quad (3.1)$$

Intuitivement, on peut remarquer que l'équation d'équilibre (1.1) est équivalente à dire que :

$$\int_{\Omega} R(\underline{x}) \cdot P(\underline{x}) d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

est vrai quelque soit la fonction $P(\underline{x})$. Il s'agit d'une *projection* de l'équation d'équilibre sur les fonctions de projection P . On appelle maintenant *résidu des équations de bord* la quantité :

$$\bar{R}(\underline{x}) = \mathbf{B}(\underline{u}) - \underline{h} \quad (3.3)$$

Intuitivement, on peut remarquer que l'équation de conditions aux limites (1.2) est équivalente à dire que :

$$\int_{\Gamma} \bar{R}(\underline{x}) \cdot \bar{P}(\underline{x}) d\Gamma = 0 \quad (3.4)$$

est vrai quelque soit la fonction $\bar{P}(\underline{x})$.

On obtient la *formulation intégrale normale* du problème en rassemblant les équations (3.2) et (3.4). Ainsi l'écriture conjointe des conditions d'équilibre et de bord (1.1 et 1.2) est équivalente à dire que

$$\int_{\Omega} R(\underline{x}) \cdot P(\underline{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{R}(\underline{x}) \cdot \bar{P}(\underline{x}) d\Gamma = 0 \quad (3.5)$$

est vrai quelques soient les fonctions $P(\underline{x})$ et $\bar{P}(\underline{x})$.

Les espaces Ω et Γ étant disjoints, la proposition précédente reste vraie si les fonctions $P(\underline{x})$ et $\bar{P}(\underline{x})$ ne sont pas indépendantes. Dans la pratique, on fera le choix le plus simple qui consiste à dire que :

$$P(\underline{x}) \equiv \bar{P}(\underline{x}) \quad (3.6)$$

3.2 Méthode des résidus pondérés

3.2.1 Forme générale

Lorsqu'on recherche la solution sous forme approchée telle que présentée au paragraphe (2), la *méthode des résidus pondérés* consiste à calculer les $N + 1$ composantes q_i de la solution approchée par projection sur $N + 1$ couples de fonctions de projection ($P_i(\underline{x})$, $\bar{P}_i(\underline{x})$) :

$$\int_{\Omega} R(\underline{x}) \cdot P_i(\underline{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{R}(\underline{x}) \cdot \bar{P}_i(\underline{x}) d\Gamma = 0 \quad (i = 0, \dots, N). \quad (3.7)$$

Les fonctions $(P_i(\underline{x}), \bar{P}_i(\underline{x}))$ sont appelées *fonctions de pondération* d'où le nom de la méthode.

Dans le cas usuel où les fonctions de pondération sont les mêmes sur le contour et dans le domaine (équation 3.6), lorsqu'on développe les résidus et qu'on introduit l'approximation de la solution telle qu'elle est définie au paragraphe 2, on obtient le système suivant :

$$\int_{\Omega} [\mathbf{L}(q_i \underline{\phi}_i(\underline{x})) - \underline{g}] \cdot P_j(\underline{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} [\mathbf{B}(q_i \underline{\phi}_i(\underline{x})) - \underline{h}] \cdot P_j(\underline{x}) d\Gamma = 0, (j = 0, \dots, N). \quad (3.8)$$

Dans le cas où les opérateurs \mathbf{L} et \mathbf{B} sont linéaires, la résolution du système (3.15) conduit à la résolution du système algébrique :

$$\mathbf{K}\underline{q} = \underline{f} \quad (3.9)$$

où

$$K_{ij} = \int_{\Omega} P_i \cdot \mathbf{L}(\underline{\phi}_j) d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \cdot \mathbf{B}(\underline{\phi}_j) d\Gamma \quad (3.10)$$

et

$$f_i = \int_{\Omega} P_i \cdot \underline{g} d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \cdot \underline{h} d\Gamma \quad (3.11)$$

3.2.2 Les méthodes des résidus pondérés

Les choix possibles pour les fonctions de projection $P_i(\underline{x})$ sont nombreux. Certains choix particuliers correspondent à des méthodes connues dont voici certaines :

- La **méthode des moments** qui consiste à choisir les fonctions de projection $P_i(\underline{x})$ telles que :

$$\int_{\Omega} P_i(\underline{x}) \cdot P_j(\underline{x}) d\Omega = \delta_{ij} \quad (3.12)$$

- La **méthodes de moindres carrés** qui est obtenue en prenant :

$$P_i = \frac{\partial}{\partial q_j} \mathbf{L}[\underline{u}] = \frac{\partial}{\partial q_j} \mathbf{L} \left[\sum_{i=1}^N q_i \underline{\phi}_i(\underline{x}) \right] \quad (3.13)$$

- La **méthode de collocation par sous domaines** qui consiste à choisir des fonctions de projection P_i constantes sur un sous domaine de Ω et nulles partout ailleurs.
- La **méthode de collocation par points** qui consiste à choisir des fonctions de projection P_i non nulles en un seul point du domaine Ω .
- La **méthode des fonctions spline** qui est obtenue en écrivant la formulation normale morceau par morceau et en imposant des conditions de raccordement de la fonction cherchée et de certaines de ces dérivées.
- La **méthode de Galerkin** qui est la plus utilisée et qui est développée dans le paragraphe suivant.

Ces méthodes sont détaillées dans l'ouvrage de A. Le Pourhiet [3]

3.3 Méthode de Galerkin

La méthode des résidus pondérés consiste à utiliser les mêmes fonctions comme *fonctions de forme* ($\underline{\phi}_i(\underline{x})$) et comme *fonctions de pondération* ($P_i(\underline{x})$). Dans le cas usuel où les fonctions de pondération sont les mêmes sur le contour et dans le domaine (équation 3.6), la formulation devient :

$$\int_{\Omega} R(\underline{x}) \cdot \underline{\phi}_j(\underline{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{R}(\underline{x}) \cdot \underline{\phi}_j(\underline{x}) d\Gamma = 0 \quad (j = 0, \dots, N). \quad (3.14)$$

et en développant les résidus :

$$\int_{\Omega} [\mathbf{L}(q_i \underline{\phi}_i(\underline{x})) - \underline{g}] \cdot \underline{\phi}_j(\underline{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} [\mathbf{B}(q_i \underline{\phi}_i(\underline{x})) - \underline{h}] \cdot \underline{\phi}_j(\underline{x}) d\Gamma = 0, (j = 0, \dots, N). \quad (3.15)$$

Dans le cas où les opérateurs \mathbf{L} et \mathbf{B} sont linéaires, la résolution du système (3.15) conduit à la résolution du système algébrique :

$$\mathbf{K} \underline{q} = \underline{f} \quad (3.16)$$

où

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\phi}_i \cdot \mathbf{L}(\underline{\phi}_j) d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\phi}_i \cdot \mathbf{B}(\underline{\phi}_j) d\Gamma \quad (3.17)$$

et

$$f_i = \int_{\Omega} \underline{\phi}_i \cdot \underline{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\phi}_i \cdot \underline{h} d\Gamma \quad (3.18)$$

3.4 Exemple

3.4.1 Équation de la chaleur

On se pose un problème de conductivité thermique unidimensionnel avec apport volumique de chaleur.

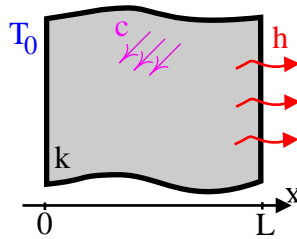


FIG. 9 – Problème de conductivité thermique 1D

Dans ce cas, l'équation de la chaleur est :

$$k \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = -c, \quad x \in [0, L] \quad (3.19)$$

où T est la température recherchée (la température de référence est considérée nulle ici), k est le coefficient de conductivité thermique et c est l'apport volumique de chaleur. Les conditions aux limites considérées sont

$$T(x) = 0, \quad x = 0 \quad (3.20)$$

qui correspond à une température imposée nulle à gauche, et

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = h, \quad x = L \quad (3.21)$$

qui correspond à un flux h imposé à droite.

La solution exacte de ce problème est bien évidemment une évolution quadratique de la température :

$$\boxed{T_{ex}(x) = -\frac{c}{2k}x^2 + \left(\frac{h}{k} + \frac{cL}{k}\right)x} \quad x \in [0, L] \quad (3.22)$$

3.4.2 Approximation linéaire

On cherche ici une approximation linéaire de la solution. C'est-à-dire qu'on prend $N = 1$ et que les deux fonctions de forme utilisées sont

$$\phi_0(x) = 1 \quad ; \quad \phi_1(x) = x$$

L'approximation linéaire de la solution en température $T_1(x)$ est donc cherchée sous la forme :

$$T_1(x) = q_0 + q_1x \quad (3.23)$$

L'équation (3.19) ne pouvant pas être satisfaite, il est clair que la solution approchée qui sera trouvée sera de très mauvaise qualité.

Le système à résoudre (équation (3.15)) est alors :

$$\int_0^L \left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{c}{k} \right] \phi_j(x) dx + (T_1(0) - 0) \phi_j(0) + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_L - \frac{h}{k} \right) \phi_j(L) = 0, \quad j = 0, 1$$

soit

$$\int_0^L \frac{c}{k} \phi_j(x) dx + (q_0 - 0) \phi_j(0) + \left(q_1 - \frac{h}{k} \right) \phi_j(L) = 0, \quad j = 0, 1$$

qui correspond au système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \int_0^L \frac{c}{k} dx + q_0 + \left(q_1 - \frac{h}{k} \right) = 0 \\ \int_0^L \frac{c}{k} x dx + 0 + \left(q_1 - \frac{h}{k} \right) L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{cL}{k} + q_0 + \left(q_1 - \frac{h}{k} \right) = 0 \\ \frac{cL^2}{2k} + \left(q_1 - \frac{h}{k} \right) L = 0 \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} q_0 = -\frac{cL}{2k} \\ q_1 = \frac{h}{k} - \frac{cL}{2k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_1(x) = -\frac{cL}{2k} + \left(\frac{h}{k} - \frac{cL}{2k} \right) x}$$

dont on voit clairement qu'elle ne satisfait aucune des équations du problème sauf bien sûr dans le cas où $c = 0$ où la solution est linéaire.

3.4.3 Approximation quadratique

On cherche maintenant une approximation quadratique de la solution. C'est-à-dire qu'on prend $N = 2$ et que les trois fonctions de forme utilisées sont

$$\phi_0(x) = 1 \quad ; \quad \phi_1(x) = x \quad ; \quad \phi_2(x) = x^2 \quad ;$$

L'approximation quadratique de la solution en température $T_2(x)$ est donc cherchée sous la forme :

$$T_2(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 \tag{3.24}$$

La solution exacte (équation (3.22)) étant quadratique, la méthode de Galerkin doit conduire à cette solution. Le système à résoudre (équation (3.15)) est alors :

$$\int_0^L (2q_2 + \frac{c}{k}) \phi_j(x) dx + (q_0 - 0) \phi_j(0) + (2q_2L + q_1 - \frac{h}{k}) \phi_j(L) = 0, \quad j = 0,1,2$$

soit

$$\begin{cases} (2q_2 + \frac{c}{k}) + q_0 + (2q_2L + q_1 - \frac{h}{k}) = 0 \\ (2q_2 + \frac{c}{k}) \frac{L^2}{2} + (2q_2L + q_1 - \frac{h}{k})L = 0 \\ (2q_2 + \frac{c}{k}) \frac{L^3}{3} + (2q_2L + q_1 - \frac{h}{k}) \frac{L^2}{2} = 0 \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ q_1 = \frac{h}{k} + \frac{cL}{k} \\ q_2 = -\frac{c}{2k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_2(x) = -\frac{c}{2k}x^2 + (\frac{h}{k} + \frac{cL}{k})x}$$

qui est bien sur la solution exacte du problème (équation 3.22).

4 Formulation Faible

4.1 Formulation forte/faible

La formulation intégrale normale (équation 3.5) définie dans la partie précédente est aussi appelée *formulation forte de problème* par opposition à la *formulation faible* définie dans cette partie.

Le terme *fort/faible* provient des contraintes de régularité à imposer sur les fonctions de base $\phi_i(\underline{x})$ employées. Dans l'équation différentielle du problème (équation 1.1), on note n_k l'ordre de dérivation le plus haut de l'opérateur \mathbf{L} par rapport à la k -ème composante du vecteur de variables \underline{x} . Quand on cherche une solution approchée sous la forme (2.1), il est bien évident que les fonctions de base $\phi_i(\underline{x})$ employées dans l'approximation doivent être n_k fois dérivables par rapport à la variable x_k en tout point du domaine d'étude. Les fonctions utilisées doivent donc être au moins de classe de continuité $n_k - 1$.

Par exemple, les fonctions d'approximation de type éléments finis linéaire présentées au paragraphe 2.3 sont de classe de continuité *zéro* seulement. Malgré leur côté pratique, leur emploi est donc restreint dans une approximation basée sur la formulation forte du problème.

L'idée de la formulation faible part de la constatation suivante : une intégration par partie de la formulation intégrale normale (3.5) abaisse d'une unité le degré de dérivation de la fonction u recherchée. Cela permet d'utiliser des fonctions de base de classe $n_k - 2$ dans l'approximation de la fonction. Les conditions de continuité imposées sur les fonctions de base sont donc *affaiblies*.

En intégrant par partie la formulation intégrale normale, on abaisse l'ordre de dérivation des fonctions de base $\phi_i(x)$ mais en revanche on introduit une dérivation des fonctions de projection $P(x)$. Les méthodes de collocations qui utilisent des fonctions de projection constantes par morceau ne pourront donc pas être appliquées à la formulation faible du problème.

4.2 Mise en oeuvre

L'abaissement d'une unité de l'ordre de dérivation de la formulation intégrale normale est toujours obtenue par application de la relation générale :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega + \int_{\Gamma} u v n_{x_i} d\Gamma \quad (4.1)$$

qui est bien sûr la *formule de Green* laquelle est la généralisation à un espace à plusieurs dimensions de la *formule d'intégration par partie* :

$$\int_a^b u \frac{\partial v}{\partial x} dx = - \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x} v dx + [uv]_a^b \quad (4.2)$$

Cette obtention de la formulation faible par intégration par partie est illustrée ci-dessous sur un exemple unidimensionnel.

4.3 Exemple

On reprend l'exemple de conductivité thermique du paragraphe 3.4.

$$\int_0^L \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{c}{k} \right] P(x) dx + (T(0) - 0) \bar{P}(0) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_L - \frac{h}{k} \right) \bar{P}(L) = 0.$$

En intégrant par partie le premier terme, on obtient :

$$-\int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} dx + \int_0^L \frac{c}{k} P(x) dx + \left[P \frac{\partial T}{\partial x} \right]_0^L + T(0) \bar{P}(0) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_L - \frac{h}{k} \right) \bar{P}(L) = 0$$

L'équation précédente se simplifie fortement en choisissant :

$$\bar{P}(L) = -P(L)$$

et aussi

$$P(0) = \bar{P}(0) = 0$$

ce qui revient à ajouter une contrainte sur les fonctions de projection choisies. On obtient alors la formulation faible du problème de conduction :

$$\int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{c}{k} P(x) dx - \frac{h}{k} P(L) = 0, \quad \forall P(x)/P(0) = 0 \quad (4.3)$$

On applique la méthode de Galerkin en prenant une approximation quadratique de la solution. La condition $P(0) = 0$ impose de choisir les fonctions de forme de telle sorte que $\phi_i(0) = 0$. Les seules fonctions à prendre pour l'approximation quadratique sont donc :

$$\phi_1(x) = x \quad ; \quad \phi_2(x) = x^2$$

L'approximation quadratique de la solution en température $T_2(x)$ est donc cherchée sous la forme :

$$T_2(x) = q_1 x + q_2 x^2$$

Le système à résoudre (équation (4.3)) est alors :

$$\int_0^L (2q_2 x + q_1) \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx - \int_0^L \frac{c}{k} \phi_j(x) dx - \frac{h}{k} \phi_j(L) = 0, \quad j = 1, 2$$

qui correspond au système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \int_0^L (2q_2 x + q_1) 1 dx & - \int_0^L \frac{c}{k} x dx & - \frac{h}{k} L = 0 \\ \int_0^L (2q_2 x + q_1) 2x dx & - \int_0^L \frac{c}{k} x^2 dx & - \frac{h}{k} L^2 = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} (q_2 L^2 + q_1 L) & - \frac{c}{k} \frac{L^2}{2} & - \frac{h}{k} L = 0 \\ \left(\frac{4}{3} q_2 L^3 + q_1 L^2 \right) & - \frac{c}{k} \frac{L^3}{3} & - \frac{h}{k} L^2 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{h}{k} + \frac{cL}{k} \\ q_2 = -\frac{c}{2k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_2(x) = -\frac{c}{2k} x^2 + \left(\frac{h}{k} + \frac{cL}{k} \right) x}$$

qui est la solution exacte du problème.

5 Minimisation de Fonctionnelle

Jusqu'ici les résolutions approchées envisagées étaient basées sur le système d'équations différentielles obtenue par écriture des équations de conservation tel que présenté dans l'introduction.

Or, il arrive parfois que des problèmes physiques soient formulés sous forme de stationnarité d'une intégrale d'énergie. Par exemple, l'équilibre de nombreux systèmes mécaniques correspond à la minimisation de leur énergie potentielle totale. Dans cette partie on s'intéresse aux méthodes d'approximation de solution pour des problèmes formulés en terme de minimisation d'une fonctionnelle.

5.1 Principe

De manière générale, la fonctionnelle à minimiser est écrite sous la forme :

$$J(\underline{u}) = \int_{\Omega} F\left(\underline{x}, \underline{u}, \dots, \frac{\partial^k \underline{u}}{\partial \underline{x}^k}\right) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{F}\left(\underline{x}, \underline{u}, \dots, \frac{\partial^k \underline{u}}{\partial \underline{x}^k}\right) d\Gamma \quad (5.1)$$

où \underline{u} est la fonction recherchée, F et \bar{F} sont les fonctions de définition de la fonctionnelle dans le domaine et sur la frontière et $\frac{\partial^k \underline{u}}{\partial \underline{x}^k}$ symbolise tous les termes possibles de dérivation à l'ordre k des composantes de \underline{u} par rapport à celles de \underline{x} .

Si, par ailleurs, la fonction \underline{u} recherchée doit vérifier des conditions dans le domaine du genre :

$$\underline{H}(\underline{u}) = 0, \quad \underline{x} \in \Omega \quad (5.2)$$

et/ou sur le bord du genre :

$$\underline{G}(\underline{u}) = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma \quad (5.3)$$

le problème devient un *problème de minimisation sous contrainte* ou *problème d'optimisation*.

La méthode classique de prise en compte de ces conditions est de considérer la fonctionnelle étendue :

$$J^*(\underline{u}, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) = J + \int_{\Omega} \underline{\lambda}^t \underline{H}(\underline{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\mu}^t \underline{G}(\underline{u}) d\Gamma \quad (5.4)$$

dont la stationnarité par rapport à \underline{u} , $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ assure le minimum de la fonctionnelle et la prise en compte des conditions. Les termes $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$ sont appelés *multiplicateurs de Lagrange*.

La minimisation de la fonctionnelle peut être exprimée analytiquement au travers d'une équation différentielle dite *équation d'Euler*. Cette équation dépend de la forme de la fonction F .

5.2 Méthode de Ritz

Plutôt que de chercher à résoudre de manière approchée l'équation d'Euler, la méthode de Ritz propose de chercher directement la solution approchée qui minimise la fonctionnelle. Comme pour la méthode des résidus pondérés, on utilise une base d'approximation :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=0}^N q_i \phi_i(\underline{x})$$

On exprime la stationnarité de la fonctionnelle par rapport à u en écrivant la stationnarité par rapport à tous les coefficients q_i . Les q_i seront alors solution d'un système algébrique. Ce système est symétrique dès lors que le degré de la fonctionnelle par rapport à u et ses dérivées ne dépasse pas deux.

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial q_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial q_N} \end{bmatrix} = \mathbf{K}\underline{q} - \underline{f} \quad (5.5)$$

où \mathbf{K} et \underline{f} ne dépendent pas de \underline{q} .

En mécanique, quand la fonctionnelle correspond à une énergie, elle peut s'écrire sous la forme :

$$J(\underline{q}) = \frac{1}{2}\underline{q}^t \mathbf{K}\underline{q} - \underline{q}^t \underline{f} \quad (5.6)$$

5.3 Exemple

5.3.1 Problème et solution exacte

Dans cet exemple, on considère un problème d'élasticité en mécanique. Une barre élastique de section S et de hauteur h est suspendue et soumise uniquement à son propre poids (figure 10). Elle est constituée d'un matériau de module d'Young E et de masse volumique ρ .

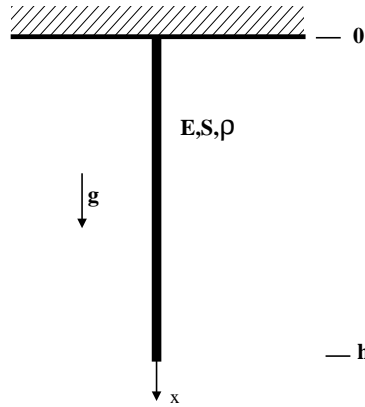


FIG. 10 – Barre soumise à son propre poids

Dans ce problème, on cherche le déplacement $u(x)$ de chaque section. Les inconnues annexes sont la déformation ϵ et l'effort normal N appliqué sur chaque section :

$$\epsilon(x) = \frac{du}{dx} \quad ; \quad N(x) = \sigma S = ES\epsilon(x)$$

où σ est la contrainte. L'équation d'équilibre de chaque section droite donne :

$$\frac{dN}{dx} + \rho gh = 0, \quad \forall x \in [0, h] \quad (5.7)$$

et les conditions aux limites traduisent un déplacement nul à l'encastrement et un effort nul appliqué à l'extrémité inférieure :

$$u(0) = 0 \quad ; \quad N(h) = 0$$

En écrivant toutes ces équations en fonction du déplacement u on obtient le système à résoudre : trouver $u(x)$ telle que :

$$\frac{d}{dx} \left(ES \frac{du}{dx} \right) + \rho g S = 0, \quad u(0) = 0, \quad ES \frac{du}{dx} \Big|_h = 0 \quad (5.8)$$

qui se résume ici à :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\rho g}{E}, \quad u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx} \Big|_h = 0 \quad (5.9)$$

La solution exacte de ce problème est triviale :

$$\boxed{u_{ex} = \frac{\rho g}{E} \left(hx - \frac{x^2}{2} \right)} \quad (5.10)$$

5.3.2 Minimum de l'énergie

Les problèmes d'élasticité peuvent se formuler sous forme de principe de minimum de l'énergie : *le champ de déplacement u solution est tel qu'il vérifie les conditions aux limites en déplacement et minimise l'énergie potentielle parmi tous les champs de déplacement qui vérifient les conditions en déplacement.* L'énergie potentielle s'exprime comme la différence entre l'énergie de déformation et le travail des forces extérieures. L'énergie de déformation est :

$$E_d(u) = \frac{1}{2} \int_0^h \sigma \epsilon dx = \frac{1}{2} \int_0^h ES \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx$$

et le travail des forces extérieures appliquées est, dans le cas de l'exemple étudié, :

$$T(u) = \int_0^h \rho g S u(x) dx$$

Le problème précédent est donc : trouver $u(x)$, tel que $u(0) = 0$ minimisant la fonctionnelle :

$$v(x)/v(0) = 0 \longrightarrow E_p(v) = \frac{1}{2} \int_0^h ES \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^h \rho g S v(x) dx$$

5.3.3 Solution approchée linéaire

On applique la méthode de Ritz pour chercher une solution approchée sous forme d'un polynôme linéaire. C'est-à-dire qu'on cherche u sous la forme :

$$u_1(x) = q_0 \phi_0(x) + q_1 \phi_1(x), \quad \phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x$$

On cherche ici à résoudre le problème de minimisation dans un espace restreint de dimension deux. La solution devant par ailleurs vérifier $u(0) = 0$, on a forcément $q_0 = 0$. La seule inconnue du problème est donc q_1 . L'énergie potentielle est donc :

$$E_p(u_1) = \frac{1}{2} \int_0^h ESq_1^2 - \int_0^h \rho g S q_1 x dx = EShq_1^2 - \rho g S \frac{h^2}{2} q_1$$

Le minimum de la fonctionnelle dans l'espace de recherche est donné par :

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = EShq_1 - \rho g S \frac{h^2}{2} = 0$$

soit

$$q_1 = \frac{\rho g h}{2E} \Rightarrow u_1(x) = \frac{\rho g h}{2E} x$$

5.3.4 Solution approchée quadratique

On applique cette fois la méthode de Ritz pour chercher une solution approchée sous forme d'un polynôme quadratique. C'est-à-dire qu'on cherche u sous la forme approchée :

$$u_2(x) = q_0 \phi_0(x) + q_1 \phi_1(x) + q_2 \phi_2(x), \quad \phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x, \quad \phi_2(x) = x^2$$

Comme dans le cas précédent, la vérification de la condition $u(0) = 0$ impose de choisir $q_0 = 0$. On utilise ici la notation matricielle. L'énergie potentielle est donc :

$$E_p(u_2) = \frac{1}{2} \underline{q}^t \mathbf{K} \underline{q} - \underline{f} \underline{q}$$

avec

$$K_{ij} = \int_0^h ES \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad \text{et} \quad f_i = \int_0^h \rho g S \phi_i dx$$

soit

$$\begin{aligned} K_{11} &= \int_0^h ES \cdot 1 \cdot 1 dx = ESh & K_{12} &= \int_0^h ES \cdot 1 \cdot 2x dx = ESh^2 \\ K_{21} &= K_{12} & K_{22} &= \int_0^h ES \cdot 2x \cdot 2x dx = \frac{4}{3} ESh^3 \end{aligned}$$

et

$$f_1 = \int_0^h \rho g S x dx = \rho g S \frac{h^2}{2} \quad f_2 = \int_0^h \rho g S x^2 dx = \rho g S \frac{h^3}{3}$$

Le système à résoudre, correspondant à la minimisation de $E_p(u_2)$, est :

$$ES \begin{bmatrix} h & h^2 \\ h^2 & \frac{4}{3}h^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \rho g S \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ \frac{h^3}{3} \end{bmatrix}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\rho g h}{E} \\ q_2 = -\frac{\rho g}{2E} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_2(x) = \frac{\rho g}{E}(-x^2 + hx)}$$

qui est bien la solution exacte du problème. La figure 11 montre une comparaison entre les solutions approchées linéaire et quadratique.

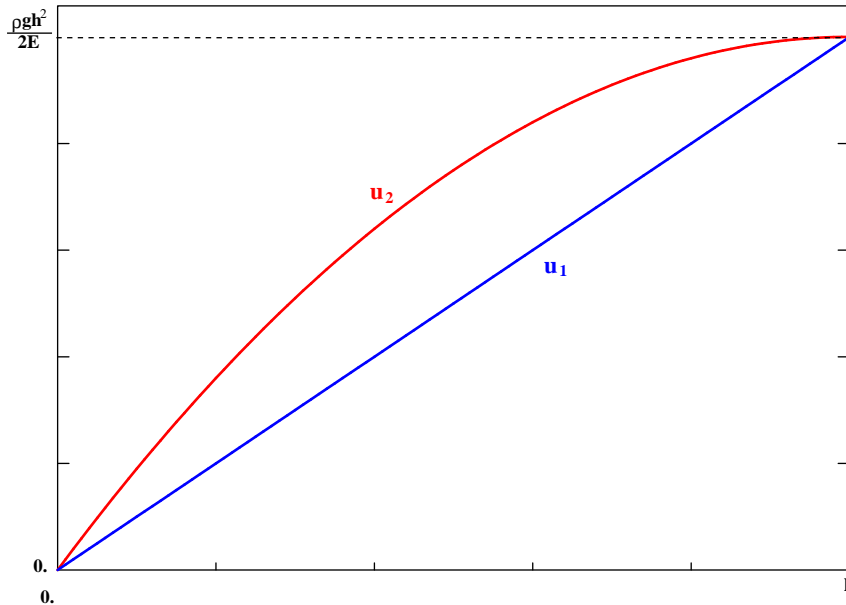


FIG. 11 – Solutions approchées du problème de barre

5.4 Obtention de la fonctionnelle

Lorsque le problème n'est pas, par nature, exprimé sous forme de minimisation d'une fonctionnelle, il est possible, dans certains cas simples, d'exprimer une fonctionnelle à partir de l'équation différentielle (1.1).

Dans le cas simple des opérateurs \mathbf{L} linéaire (équation 1.3), on peut montrer que l'obtention de la fonctionnelle n'est possible que si \mathbf{L} est *positif* et *auto-adjoint*.

L'opérateur \mathbf{L} est *positif* si il est tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{u}^t \mathbf{L}(\underline{u}) d\Omega \geq 0, \quad (5.11)$$

et que l'égalité n'est obtenue que pour $\underline{u} = 0$.

L'opérateur \mathbf{L} est *auto-adjoint* (ou symétrique) si il est tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{u}^t \mathbf{L}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{v}^t \mathbf{L}(\underline{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \dots d\Gamma. \quad (5.12)$$

La plupart des opérateurs rencontrés dans les problèmes traités ici sont définis positifs et auto-adjoints.

Si l'opérateur \mathbf{L} est linéaire, défini positif et auto-adjoint, on peut montrer que la résolution de l'équation aux dérivées partielles $\mathbf{L}(\underline{u}) - \underline{g} = 0$ dans Ω est équivalente à la minimisation de la fonctionnelle *artificielle* :

$$J(\underline{u}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \underline{u}^t \mathbf{L}(\underline{u}) - \underline{u}^t \underline{g} \right] + \int_{\Gamma} \dots d\Gamma \quad (5.13)$$

où le dernier terme dépend des conditions aux limites associées (équation 1.2). L'équation différentielle de départ (équation 1.1) est alors l'équation d'Euler correspondant à la fonctionnelle $J(\underline{u})$.

Lorsque le problème de minimisation est résolu de manière approchée :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=0}^N q_i \phi_i(\underline{x})$$

la minimisation de la fonctionnelle conduit au système :

$$\mathbf{K}\underline{q} = \underline{f} \quad (5.14)$$

où

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\phi}_i^t \mathbf{L}(\underline{\phi}_j) d\Omega + \int_{\Gamma} \dots d\Gamma \quad (5.15)$$

et

$$f_i = \int_{\Omega} \underline{\phi}_i^t \underline{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \dots d\Gamma \quad (5.16)$$

Cette fonctionnelle artificielle correspond à la formulation forte puisque l'ordre de dérivation des fonction de base est le même que celui de \mathbf{L} . Il est toujours possible d'appliquer la formule de Green au premier terme pour construire une fonctionnelle (associée à la formulation faible) dans laquelle l'ordre de dérivation est abaissé d'une unité.

5.5 Conclusions

Pour une équation dont on ne connaît pas de fonctionnelle naturelle et qu'on souhaite résoudre de manière approchée, deux méthodes sont possibles :

- la méthode de Galerkin appliquée à la formulation faible des résidus pondérés,
- la méthode de Ritz appliquée à la fonctionnelle artificielle de l'équation différentielle (si elle existe).

Ces deux approches diffèrent par la présence de termes de bord associés aux conditions du type $\underline{u} = \underline{u}_d$ sur le bord Γ . Des choix judicieux de fonctions de base permettent de rendre ces deux méthodes totalement identiques.

Lorsque l'une ou l'autre de ces deux méthodes est employées avec des fonctions de base de type Éléments Finis, elle devient la méthode communément appelée *Méthode des Éléments Finis* (MEF) qui fait l'objet de la dernière partie.

6 Méthode des Éléments Finis

La méthode des Éléments Finis (MEF) n'a rien d'original en soi. Il s'agit simplement d'une combinaison d'ingrédients qui permettent d'obtenir une méthode bien adaptée à la résolution approchée par ordinateur de problèmes de physique.

6.1 Intérêts

On a vu que la méthode de Galerkin appliquée à la formulation faible du problème ou la méthode de Ritz appliquée à la minimisation d'une fonctionnelle conduisent à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\mathbf{K}\underline{q} = \underline{f} \quad (6.1)$$

où les termes de la matrice \mathbf{K} s'écrivent sous la forme :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{L}(\phi_j) d\Omega$$

par exemple.

L'emploi de la MEF résout deux problèmes :

Tout d'abord, le calcul des termes K_{ij} nécessite l'intégration sur le domaine Ω . On imagine bien que, dans le cas de domaines 2D ou 3D de formes complexes, le calcul de ces intégrales peut être très délicat.

Dans la MEF, les fonctions de base ont pour support de définition les éléments du maillage. De plus ces éléments ont des formes simples (segments, triangles, quadrangles, tétraèdres, ...). Les intégrations peuvent se faire sur les éléments, élément par élément, en remarquant que :

$$\int_{\Omega} \dots d\Omega \simeq \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_{E_i}} \dots d\Omega_{E_i} \quad (6.2)$$

où M est le nombre d'éléments du maillage et Ω_{E_i} le domaine couvert par le i -ème élément. La relation précédente n'est pas toujours une égalité car, dans le cas de domaines de forme complexe, la couverture du domaine par les éléments n'est pas forcément exacte comme le montre la figure 12.

Dans la pratique, les intégrales sont calculées numériquement, mais de manière exacte, en utilisant des techniques d'intégration numérique telles que la *Méthode de Gauss* [1, 3], par exemple.

Ensuite, les termes K_{ij} ou f_i sont associés à des fonctions de base ϕ_i ou ϕ_j . Les fonctions étant toutes différentes (par nature), les calculs à effectuer sont tous différents. Cette différence de traitement des termes n'est pas très pratique pour un traitement numérique du problème.

Dans le cas de la MEF, les fonctions sont aussi toutes différentes, bien qu'elles aient des formes (*chapeau*) identiques, les fonctions associées à des points d'interpolation du bord sont différentes des fonctions associées à des points intérieurs. Par contre, on remarque que lorsqu'on considère la trace des fonctions sur les éléments, toutes les représentations *élémentaires* ont la même forme. Cela est illustré en dimension un sur la figure 13 et en dimension deux sur la figure 14.

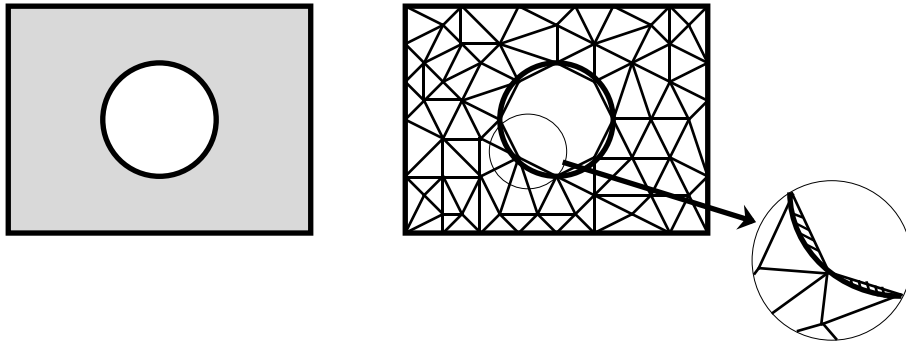


FIG. 12 – Approximation dans le couverture du domaine

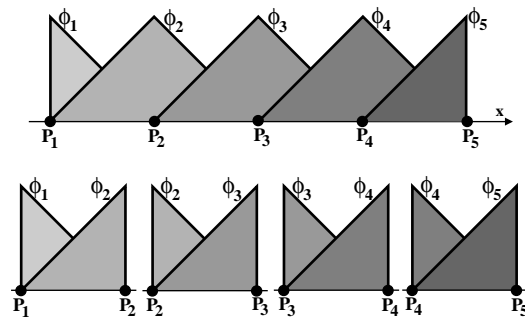


FIG. 13 – Découpage en éléments 1D

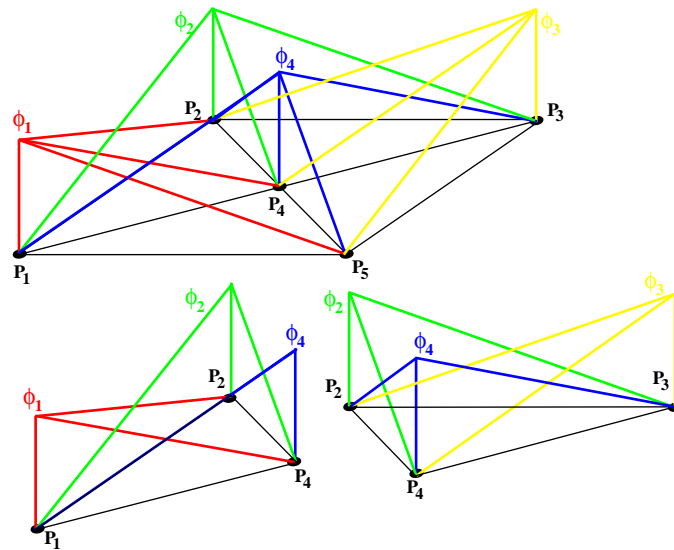


FIG. 14 – Découpage en éléments 2D

6.2 Mise en oeuvre

6.2.1 Principe

Les différents termes de la matrice de raideur \mathbf{K} et du vecteur des forces généralisées \underline{f} sont construits élément par élément à l'aide de la propriété (6.2). D'autre part, sur un élément donné, les seules fonctions de base non nulles sont celles associées aux nœuds sommets de l'élément. Ainsi, les informations nécessaires pour la construction des termes de raideur et de force généralisée sur l'élément sont purement locales à l'élément.

La matrice de raideur \mathbf{K} est donc construite comme un assemblage de *matrices de rigidité élémentaires*. Il en va de même pour le vecteur des forces généralisées \underline{f} construit comme un assemblage de *vecteurs forces généralisées élémentaires*.

Tous les éléments ayant la même structure, le principe de construction des termes élémentaires est commun à tous les éléments. Il s'agit donc de le définir une fois pour toute et de l'appliquer ensuite à chacun des éléments.

La définition d'une méthode des éléments finis pour un type de problème donné passe donc par une première phase de définition des principes de construction des termes élémentaires appelée *écriture de l'élément*.

6.2.2 Différentes étapes de l'écriture d'un élément

- A. Choix de la géométrie de l'élément
 - 1D *segments* droits ou courbes
 - 2D *triangles, quadrangles* à bords droits ou courbes
 - 3D *tétraèdres, pyramides, prismes, cubes* droits ou courbes
- B. Choix des fonctions de base et des inconnues
- C. Expression des champs et de leurs dérivées
- D. Calcul de la matrice de raideur élémentaire
- E. Calcul des vecteurs forces généralisés élémentaires associés aux différentes conditions aux limites

6.2.3 Différentes étapes de la résolution d'un problème

- I. Maillage : découpage du domaine en éléments géométriques
- II. Choix de la formulation : Choix des fonctions de base
- III. Calcul des matrices de raideur : calcul des matrices élémentaires puis assemblage de la matrice globale.
- IV. Calcul du vecteur des forces généralisées : idem
- V. Prise en compte de CL sur les inconnues.
- VI. Résolution du système linéaire.
- VII. Détermination du champ en tout point.
- VIII. Calcul des dérivées sur les éléments.
- IX. Détermination des réactions aux limites.

6.3 Exemple 1D

On s'intéresse à un problème de Résistance des Matériaux où n'intervient que la traction. C'est un problème de *barre* élastique. La MEF est ici définie à partir du principe de minimum de l'énergie potentielle et de la méthode de Ritz.

6.3.1 Écriture de l'élément

A. Géométrie de l'élément

Compte tenue de la géométrie unidimensionnelle du problème, on considère un élément finis de type segment. On considère une section S et un module d'Young E constants.

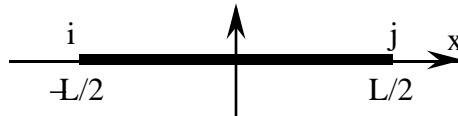


FIG. 15 – Géométrie de l'élément "Barre"

B. Choix des fonctions de base

On choisit ici des fonctions de base linéaires par morceau telles que celles présentées au paragraphe 2.3. Sur l'élément, elles ont la représentation graphique donnée en figure 16.

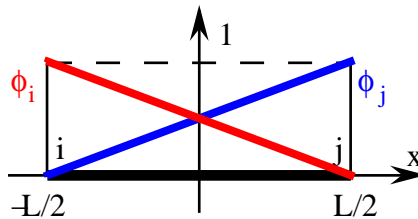


FIG. 16 – Fonctions de base de l'élément "Barre"

Leur définition analytique est :

$$\phi_i(x) = -\frac{x}{L} + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \phi_j(x) = \frac{x}{L} + \frac{1}{2}$$

ce qui donne

$$u(x) = q_i \underbrace{\left(-\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right)}_{\phi_i(x)} + q_j \underbrace{\left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right)}_{\phi_j(x)}$$

C. Expression du champ et de ses dérivées

Le déplacement s'exprime en notation matricielle :

$$u(x) = \left[-\frac{x}{L} + \frac{1}{2} \quad \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \right] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

la déformation :

$$\epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{q_i - q_j}{L}$$

$$\epsilon(x) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

et enfin la contrainte :

$$N(x) = ES\epsilon(x) = ES\left(\frac{q_i - q_j}{L}\right)$$

$$N(x) = \begin{bmatrix} \frac{-ES}{L} & \frac{ES}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

D. Matrice de raideur élémentaire

Énergie de déformation élémentaire :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ES\epsilon^2(x) dx$$

$$E_d = \frac{1}{2} ES \left(\frac{q_j - q_i}{L}\right)^2 L = \frac{1}{2} \frac{ES}{L} \left(\frac{q_j - q_i}{L}\right)^2$$

qu'on souhaite écrire sous la forme

$$E_d = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_i & q_j \end{bmatrix} [K_e] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

soit

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & \frac{-ES}{L} \\ \frac{-ES}{L} & \frac{ES}{L} \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut aussi l'obtenir sous la forme :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ES\epsilon(x)\epsilon(x) dx$$

$$E_d = \begin{bmatrix} q_i & q_j \end{bmatrix} \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ES \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

Soit :

$$[K_e] = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ES \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & \frac{-1}{L^2} \\ \frac{-1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

E. Vecteur des forces généralisées

De manière générale, le travail des forces extérieures s'exprime sous la forme :

$$L = F_i q_i + F_j q_j + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) u(x) dx$$

Dans le cas de forces concentrées on a donc :

$$[F_e] = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix}$$

Pour les forces réparties, l'expression dépend de $f(x)$:

- $f(x)$ constant, $f(x) = f$

$$\begin{aligned} L &= f \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{q_j - q_i}{L} x + \frac{q_i + q_j}{2} \right] dx \\ &= f \left(\frac{q_i + q_j}{2} \right) L = \begin{bmatrix} q_i & q_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \frac{L}{2} \\ f \frac{L}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

soit :

$$[F_e] = \frac{fL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $f(x)$ linéaire, $f(x) = f \frac{2x}{L}$

$$\begin{aligned} L &= f \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \left[\frac{q_j - q_i}{L} x + \frac{q_i + q_j}{2} \right] dx \\ L &= f \frac{2}{L} \left[2 \frac{L^3}{3.8} \frac{q_j - q_i}{L} \right] = \frac{fL}{6} (q_j - q_i) \end{aligned}$$

soit :

$$[F_e] = \frac{fL}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.3.2 Utilisation de l'élément

On se pose le problème de Résistance des Matériaux suivant. Une barre de longueur l , de section S et constitué d'un matériau de caractéristique élastique E est soumise à son propre poids ($f = \rho g$). Elle est soumise à une action $-F$ à une extrémité en encastrement à l'autre.

La solution RdM est donnée par l'effort normal

$$N(x) = -f(l - x) - F,$$

la déformation

$$\epsilon(x) = \frac{f}{ES} (l - x) - \frac{F}{ES},$$

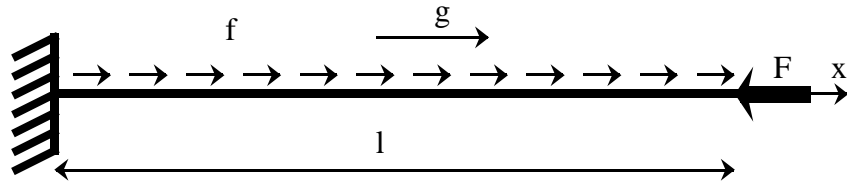


FIG. 17 – Barre soumise à son propre poids et à une action en bout

et le déplacement

$$u(x) = \frac{f}{ES} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{F}{ES} x.$$

I. Maillage

On utilise le maillage présenté sur la figure 18. Il est composé de trois éléments de longueurs identiques et donc de quatre nœuds.

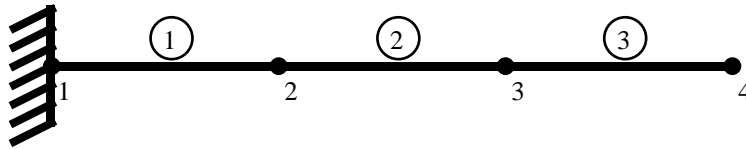


FIG. 18 – Maillage de la barre

II. Choix de l'élément

On utilise l'élément défini précédemment. On a alors $l = 3L$. La matrice de raideur est :

$$[K_e] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

III. Calcul de la matrice de raideur

Le maillage est défini par le tableau de connectivité 1.

élément	nœud i	nœud j
1	1	2
2	2	3
3	3	4

TAB. 1 – Table de connectivité du maillage

On pratique l'assemblage des matrices élémentaires :

$$[K] = \frac{3ES}{l} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{matrix}$$

Ce qui donne :

$$[K] = \frac{3ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

IV. Calcul du vecteur des forces généralisées

- Force concentrée sur l'élément 3 :

$$[F_e] = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \end{bmatrix}$$

- Force répartie sur tous les éléments

$$[F_e] = \frac{Fl}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On pratique l'assemblage des vecteurs élémentaires :

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{matrix}$$

Ce qui donne :

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix}$$

V. Prise en compte des conditions aux limites en déplacement

La condition d'encastrement au nœud 1 s'écrit : $q_1 = 0$. La façon la plus simple de résoudre est de remplacer le système :

$$\frac{3ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix}$$

par :

$$\frac{3ES}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix}$$

La première ligne a été supprimée car q_1 n'est pas une inconnue. La première colonne est supprimée car q_1 est nulle.

VI. Résolution du système linéaire

Le système a pour solution :

$$q_2 = \frac{l}{3ES} \left[\frac{5}{6} fl - F \right]$$

$$q_3 = \frac{l}{3ES} \left[\frac{8}{6} fl - 2F \right]$$

$$q_4 = \frac{l}{3ES} \left[\frac{9}{6} fl - 3F \right]$$

VII. Détermination du champ en tout point

La figure 19 donne la représentation *éléments finis* du champ $u(x)$.

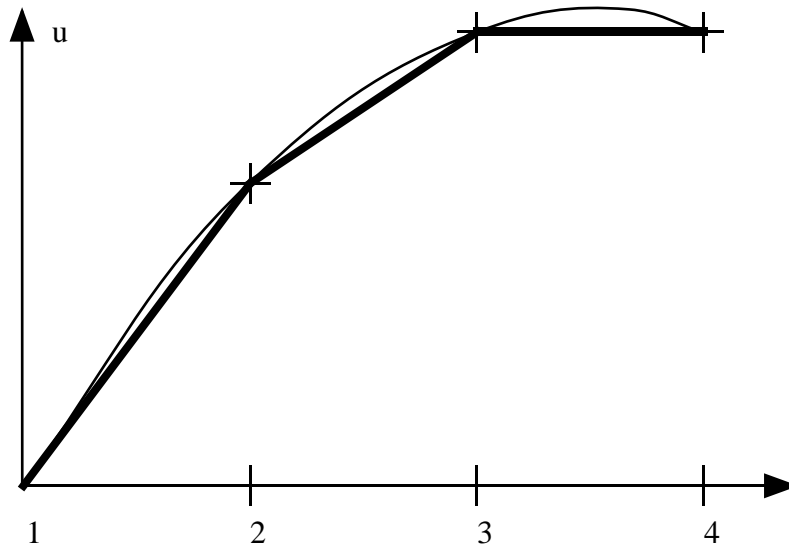


FIG. 19 – Déplacement calculé et solution RdM (pour $F = fl/6$)

VIII. Calcul des dérivées sur les éléments

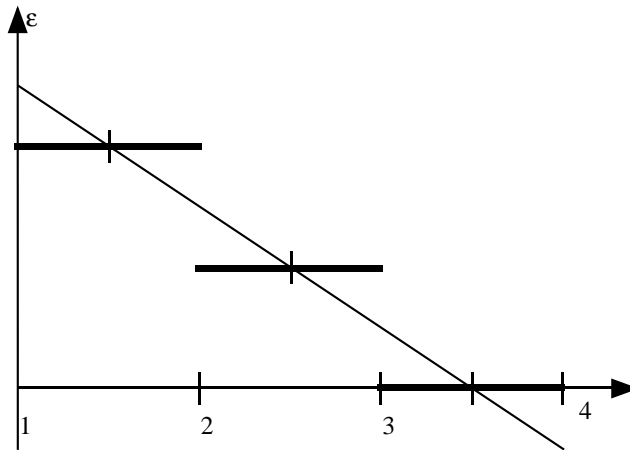
La déformation $\epsilon(x)$ et l'effort normal $N(x)$ sont calculés de manière élémentaire :

$$\epsilon(x) = \frac{q_i - q_j}{L} \quad N(x) = ES \frac{q_i - q_j}{L}$$

ce qui donne pour chaque élément :

Élément 1:	$\epsilon(x) = \frac{1}{ES} \left[\frac{5}{6} fl - F \right]$	$N(x) = \frac{5}{6} fl - F$
Élément 2:	$\epsilon(x) = \frac{1}{ES} \left[\frac{3}{6} fl - F \right]$	$N(x) = \frac{3}{6} fl - F$
Élément 3:	$\epsilon(x) = \frac{1}{ES} \left[\frac{1}{6} fl - F \right]$	$N(x) = \frac{1}{6} fl - F$

Il est intéressant de remarquer que le champ $N(x)$ n'est pas statiquement admissible.

FIG. 20 – Déformation calculée et solution RDM (pour $F = fl/6$)

IX. Calcul des réactions aux appuis

Le champ $N(x)$ n'étant pas SA, il ne peut être utilisé pour le calcul des réactions aux appuis. Pour calculer la réaction R à l'encastrement, on peut résoudre :

$$\frac{3ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fl}{6} + R \\ \frac{Fl}{3} \\ \frac{Fl}{3} \\ \frac{Fl}{6} - F \end{bmatrix}$$

Qui donne

$$R = F - fl$$

7 Conclusions

Références

- [1] Curnier A. : *Méthodes Numériques en Mécanique des Solides*, Presses Polytechniques et Universitaires Romanes, Lausanne, ISBN 2-88074-247-1, 1993. 21
- [2] Euvrard D.: *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur*, Masson, Paris, ISBN 2-225-84509-3, 1994.
- [3] Le Pourhiet A.: *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles: une première approche*, Cepadues Editions, Toulouse, ISBN 2-85428-174-6, 1988. 9, 21
- [4] Nicaise S.: *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, ISBN 2-10-004941-0, 2000.
- [5] Raviart P.A. et Thomas J.M.: *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, ISBN 2-10-003965-2, 1998.