

Exemples de dynamique sur base modale

L. CHAMPANEY et Ph. TROMPETTE

Objectifs :

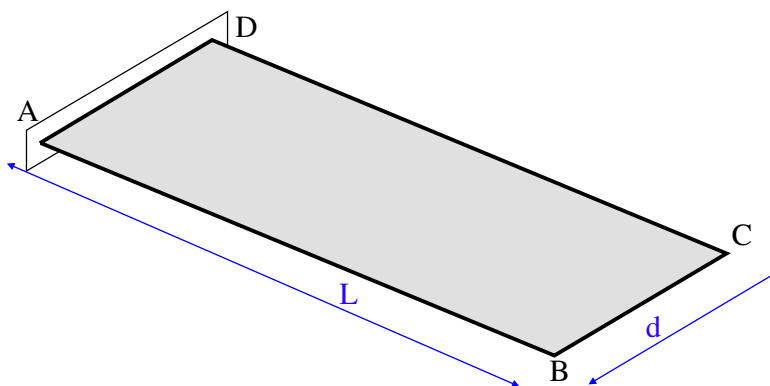
- Dynamique sur base modale réduite,
- Comparaison avec solution de référence,
- Influence des modes de la base réduite.

Dans cette partie, nous comparons des résultats de vibrations libres d'une structure simple écartée de sa position l'équilibre puis abandonnée sans vitesse initiale. Nous comparons les solutions obtenues en dynamique modale sur base réduite avec différents modes contenus dans la base.

Table des matières

1	Problème	2
2	Base modale	3
3	Mouvement de flexion	5
4	Mouvement de torsion	8
5	Conclusions	12

1 Problème



$L = 1m$, $d = 0.4m$, épaisseur : $0.01m$

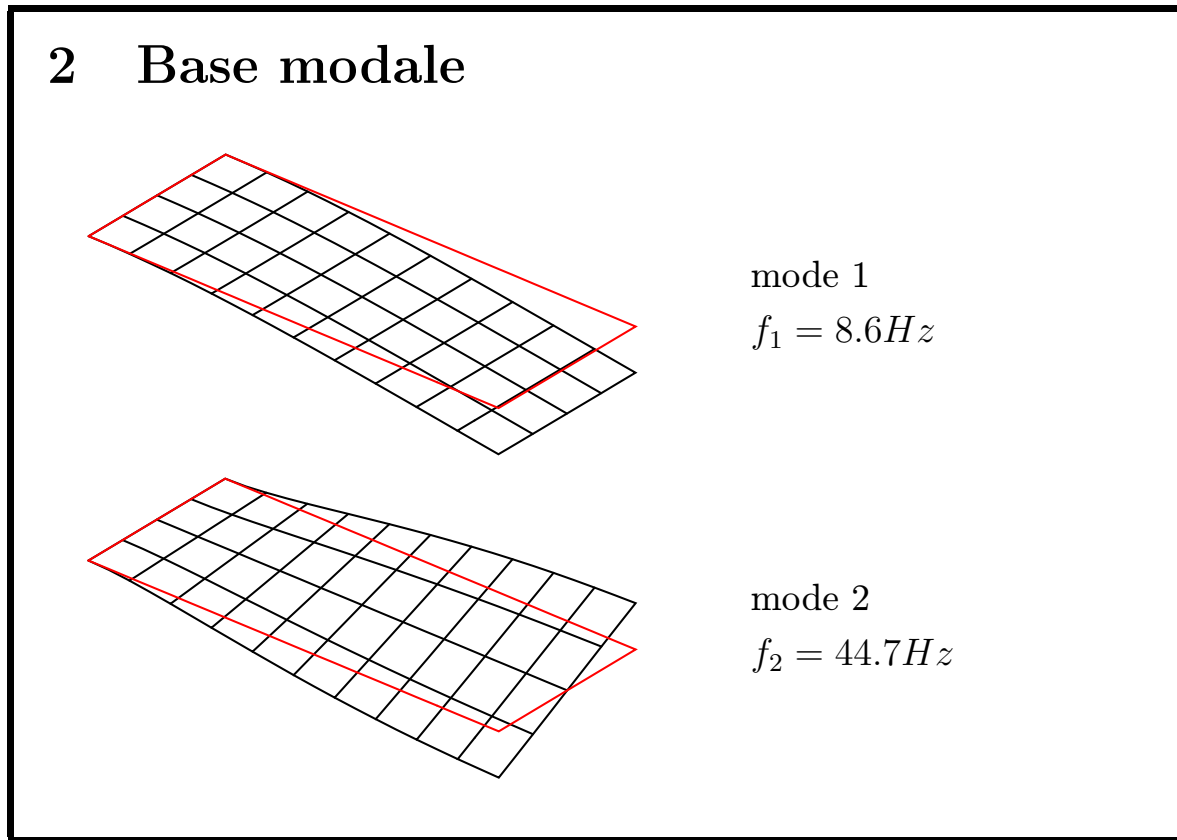
$E = 2.1E11Pa$, $\nu = 0.3$ et $\rho = 7800kg/m^3$

Maillage : 40 éléments *plaque*

(8 noeuds avec cisaillement transverse)

Nous considérons la plaque rectangulaire représentée sur la figure ci-dessus. Elle est encastree à l'une de ses extrémités et libre sur le reste de son pourtour. Les caractéristiques du matériau élastique sont indiquées sur la figure.

Pour la résolution par éléments finis, on utilise un maillage régulier composé de 40 éléments plaques avec cisaillement transverse. Ses éléments utilisent une approximation quadratique du déplacement hors plan et des rotations. Chaque élément dispose de huit noeuds et donc de 48 degrés de liberté.

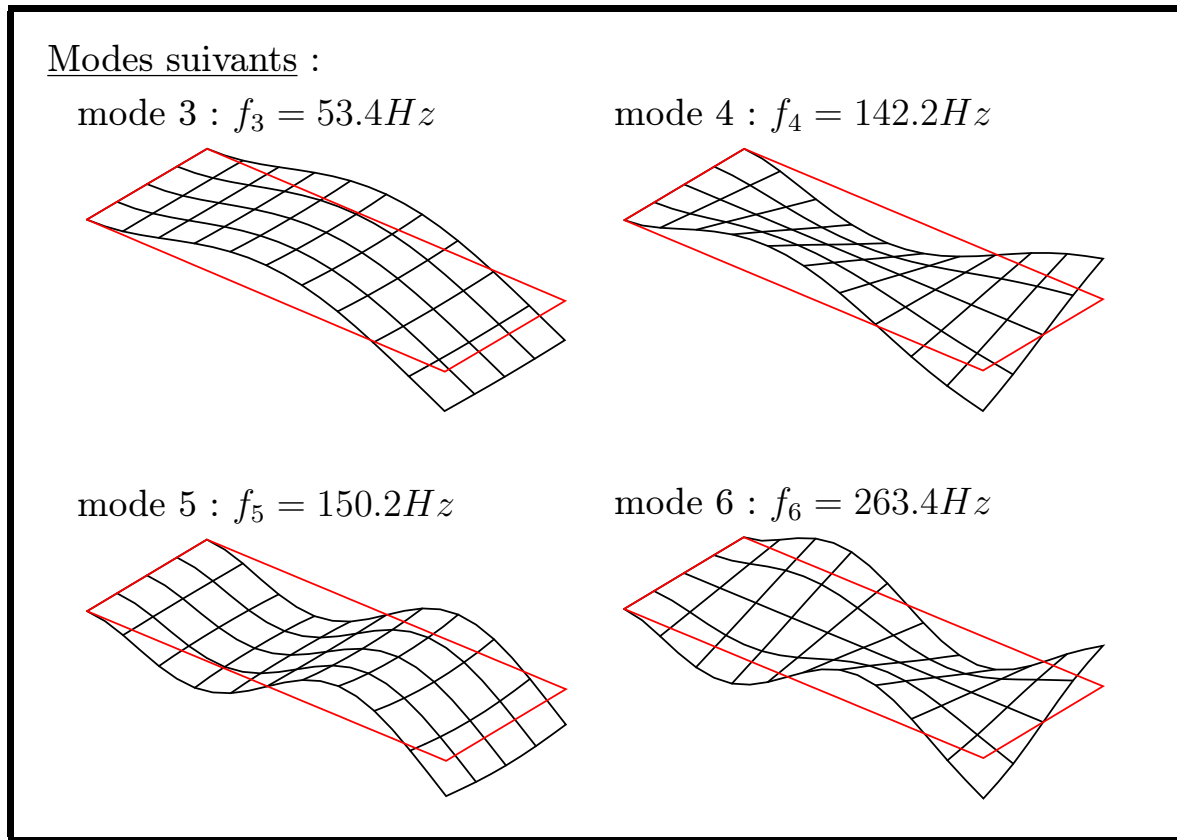


Afin de conduire l'analyse dynamique en projection sur une base modale réduite, nous commençons par construire la base modale de la structure.

Le premier mode est à une fréquence de $8.6Hz$. Il s'agit du premier mode de flexion de la plaque. Il ne présente pas de noeud de vibration. Il ressemble fort au premier mode de vibration d'une poutre encastree-libre.

Le deuxième mode est à une fréquence beaucoup plus élevée de $44.7Hz$. Il s'agit du premier mode de torsion. On l'appelle mode de torsion par comparaison avec le phénomène de torsion des poutres. Il s'agit bien évidemment d'un mouvement de flexion de la plaque.

Dans la suite, nous étudierons une vibration de flexion puis une vibration de torsion, ces deux modes auront, on s'en doute, une importance capitale pour ces deux types de vibration.



Les autres modes de la base sont les suivants (les fréquences sont indiquées sur la figure ci-dessus) :

Mode 3 : deuxième mode de flexion. Il présente un noeud de vibration.

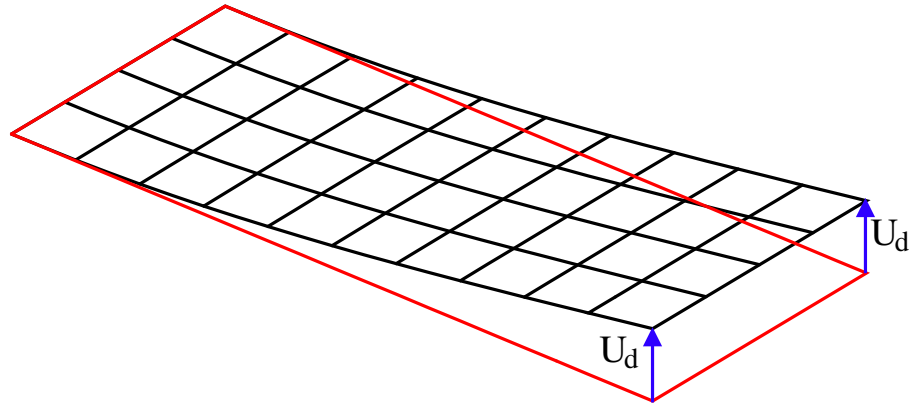
Mode 4 : deuxième mode de torsion.

Mode 5 : troisième mode de flexion. Il présente deux noeuds de vibration. On commence à constater sur ce mode un couplage avec la flexion transverse. Ce couplage est due aux effets *Poisson*.

Mode 6 : troisième mode de torsion.

Nous nous sommes volontairement limités à six modes pour la construction de la base modale réduite. Rappelons que la base modale complète comporte autant de modes qu'il y a de degrés de liberté dans la structure (894 ici). Il était possible de chercher des modes supplémentaires que nous aurions obtenu avec une précision tout à fait satisfaisante compte tenu de la qualité des éléments utilisés. La suite nous montrera que ces six premiers modes sont largement suffisants pour l'utilisation que nous faisons de la base réduite.

3 Mouvement de flexion



Forme initiale en flexion ($U_d = 0.1m$)

Plaque abandonnée sans vitesse initiale

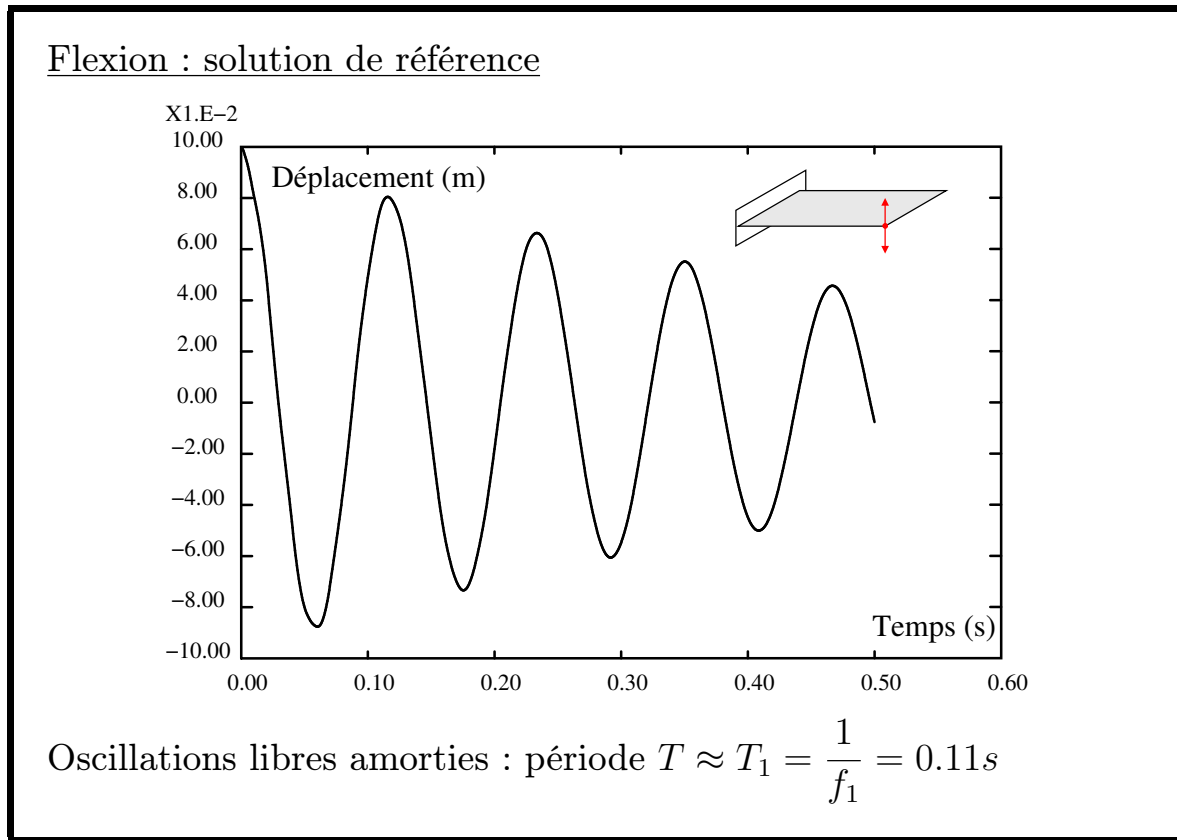
Pas d'efforts extérieurs

Amortissement modal : 8% sur chaque mode

Le premier mouvement de vibrations libres étudié est un mouvement de flexion. Nous simulons la plaque écartée en flexion de sa position d'équilibre puis abandonnée sans vitesse initiale.

Pour cela, nous commençons par effectuer un calcul statique de la plaque soumise à un déplacement U_d uniforme de son extrémité libre. La solution en déplacement de ce problème sert de champ de déplacement initial $w(x, y, 0)$ au problème de dynamique. Le champ de vitesse initial $\dot{w}(x, y, 0)$ est nul. Les efforts extérieurs sont nuls pendant toute la durée de l'étude. Nous représentons donc bien une plaque abandonnée en vibrations libres sans vitesse initiale.

Afin de modéliser la dissipation visqueuse par frottement avec l'air (et surtout pour mettre en évidence le phénomène d'amortissement), nous introduisons un amortissement modal uniforme de 8% sur chaque mode.



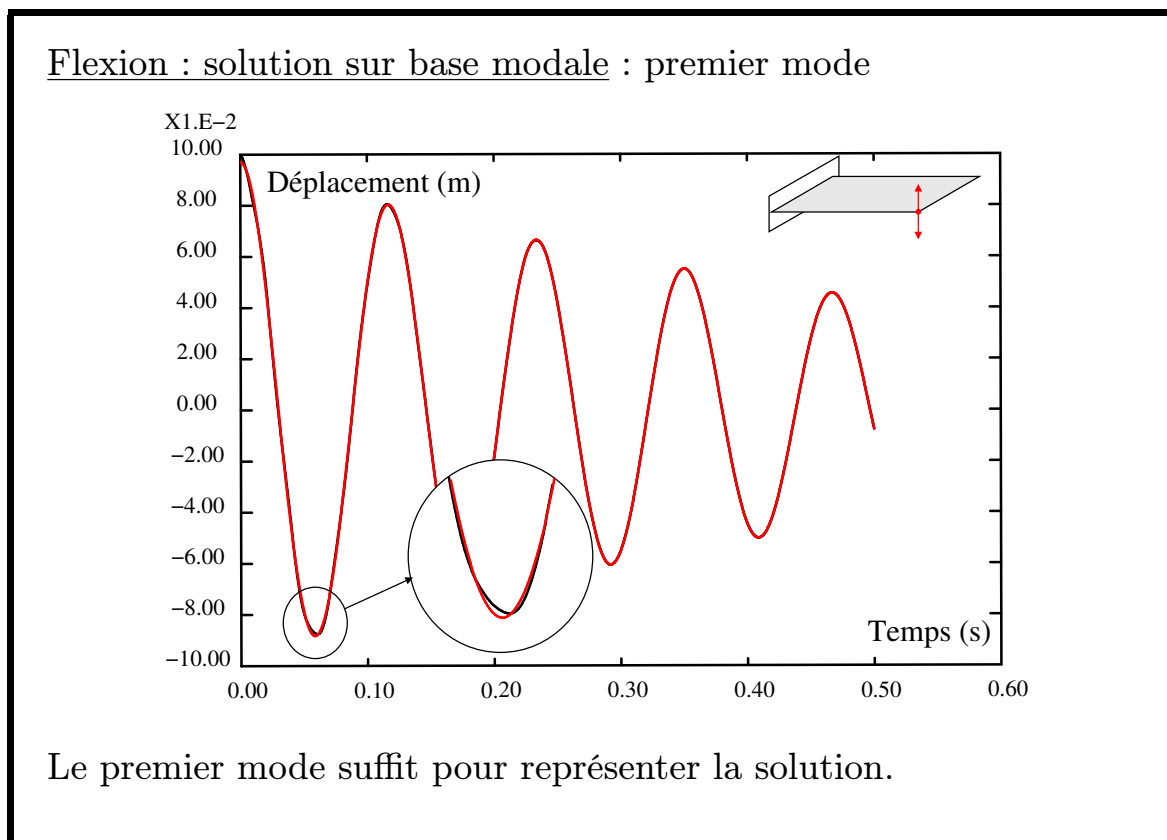
La solution que nous utilisons comme référence pour ce simple problème de flexion est la solution obtenue par projection sur une base modale composée des six modes présentés auparavant.

Pour choisir la durée d'observation, nous supposons que la fréquence de vibration de la structure ainsi abandonnée sera proche de la fréquence du premier mode (qui est le premier mode de flexion). La période associée est :

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = 0.11s$$

Nous choisissons donc une durée d'étude de 0.5s afin d'observer quelques oscillations et de voir ainsi les effets de l'amortissement.

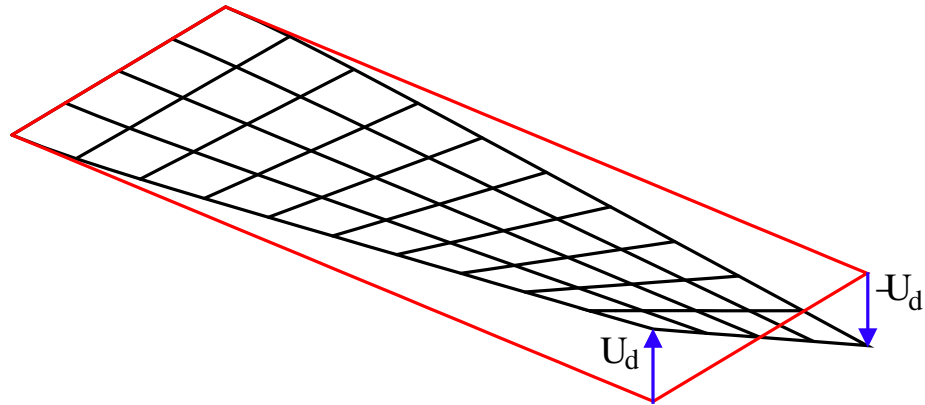
La figure ci-dessus donne l'évolution du déplacement hors plan d'un coin de l'extrémité libre de la plaque. On constate un mouvement qui ressemble très fortement à un mouvement sinusoïdal amorti (caractéristique de vibrations libres amorties). La période T du signal semble être très proche de la période T_1 du premier mode propre.



Nous traitons maintenant le problème en utilisant uniquement le premier mode dans la base réduite.

La figure ci-dessus donne les courbes de déplacement du même coin de l'extrémité libre obtenues par l'analyse avec six modes et par celle avec un mode. On constate que la solution est complètement représentée avec seulement le premier mode. On remarque uniquement quelques écarts très minimes (voir figure).

4 Mouvement de torsion



Forme initiale en torsion ($U_d = 0.1m$)

Plaque abandonnée sans vitesse initiale

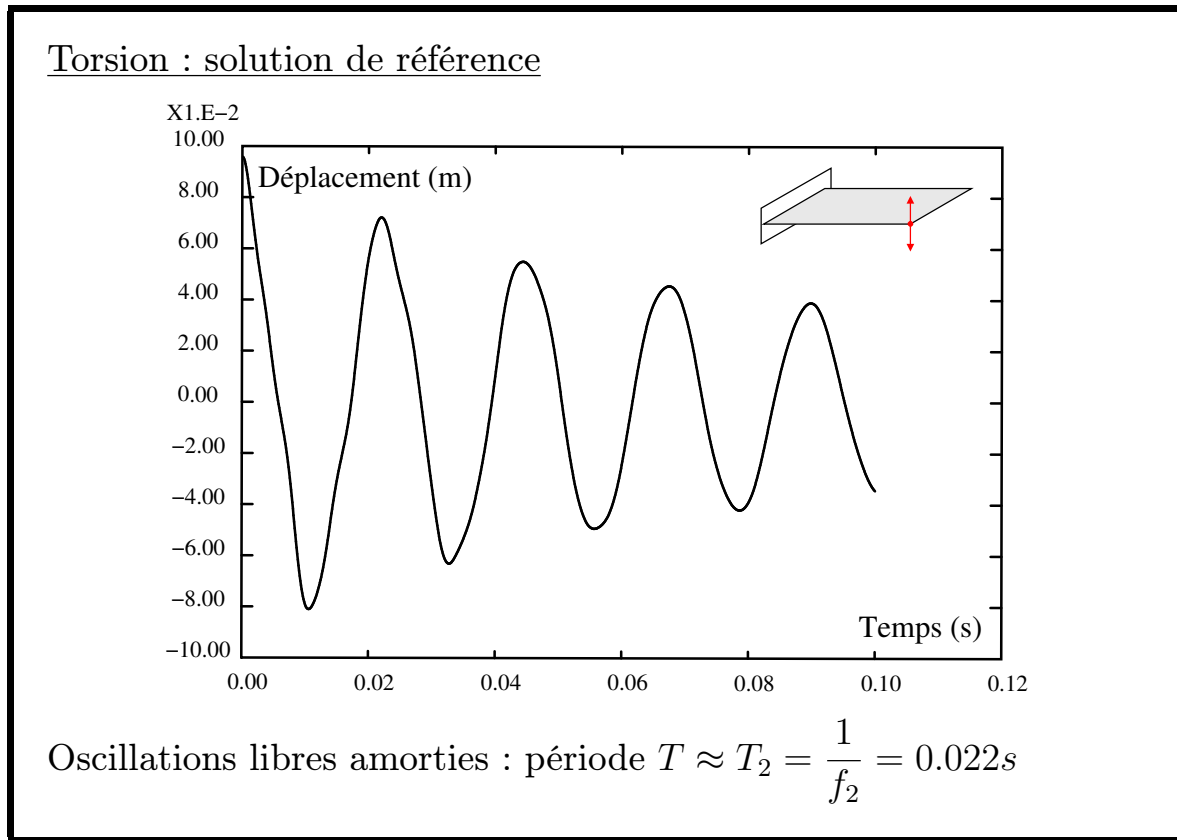
Pas d'efforts extérieurs

Amortissement modal : 8% sur chaque mode

Le deuxième mouvement de vibrations libres étudié, est un mouvement de torsion. Nous simulons la plaque écartée en torsion de sa position d'équilibre puis abandonnée sans vitesse initiale.

Pour cela, nous commençons par effectuer un calcul statique de la plaque soumise à un déplacement U_d sur un des coins libres et un déplacement $-U_d$ sur l'autre coin. La solution en déplacement de ce problème sert de champ de déplacement initial $w(x, y, 0)$ au problème de dynamique. Le champ de vitesse initiale $\dot{w}(x, y, 0)$ est nul. Les efforts extérieurs sont nuls pendant toute la durée de d'étude. Nous représentons donc bien une plaque abandonnée en vibrations libres sans vitesse initiale.

Nous introduisons, pour cet exemple aussi, un amortissement modal uniforme de 8% sur chaque mode.



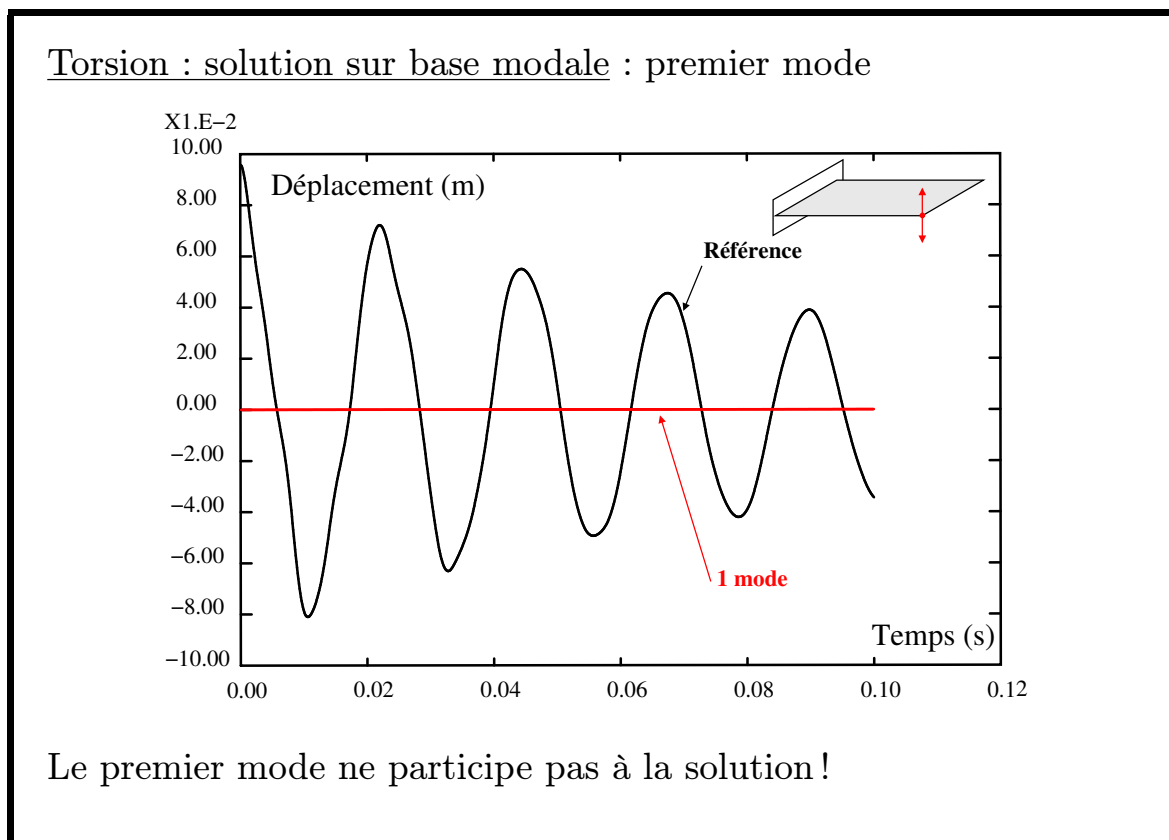
La solution que nous utilisons comme référence pour ce simple problème de torsion est la solution obtenue par projection sur une base modale composée des six modes présentés auparavant.

Pour choisir la durée d'observation, nous supposons que la fréquence de vibration de la structure ainsi abandonnée est proche de la fréquence du deuxième mode (qui est le premier mode de torsion). La période associée est :

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = 0.022s$$

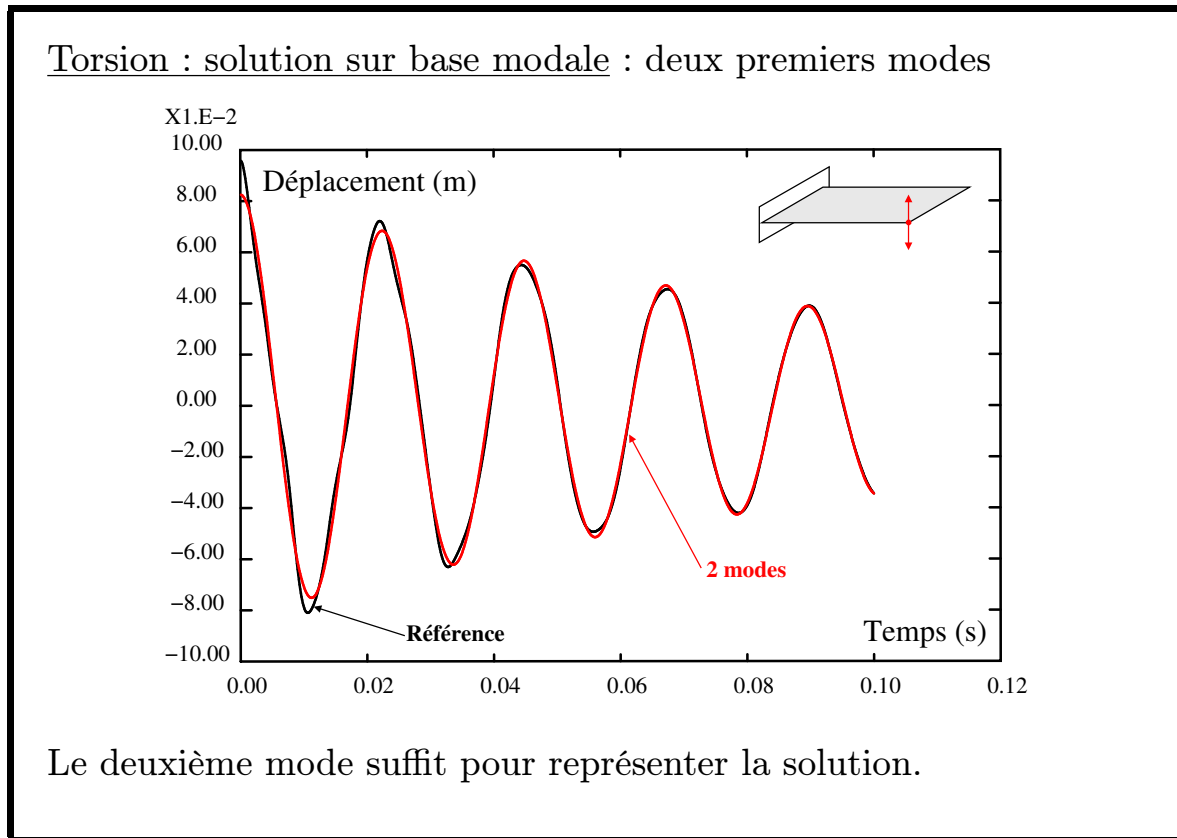
Nous choisissons donc une durée d'étude de $0.1s$ afin d'observer quelques oscillations de torsion et voir ainsi les effets de l'amortissement.

La figure ci-dessus donne l'évolution du déplacement hors plan du coin initialement déplacé de la valeur U_d . comme dans le cas de la flexion, on constate un mouvement qui ressemble très fortement à un mouvement sinusoïdal amorti (caractéristique de vibrations libres amorties). La période T du signal semble être très proche de la période T_2 du premier mode propre.



Nous conduisons maintenant le problème en utilisant uniquement le premier mode dans la base réduite.

La figure ci-dessus donne les courbes obtenues par l'analyse avec six modes et par celle avec un mode pour le déplacement du même coin de l'extrémité libre. On constate que la solution obtenue avec seulement le premier mode est complètement nulle. Cela signifie simplement que le premier mode ne participe pas du tout à ce mouvement de torsion.



Nous conduisons maintenant le problème en utilisant le premier et le second mode dans la base réduite.

La figure ci-dessus donne les courbes obtenues par l'analyse avec six modes et par celle avec les deux modes pour le déplacement du même coin de l'extrémité libre. Les deux courbes obtenues sont très proches l'une de l'autre. Le premier mode de flexion ne participant pas, cela veut dire que la solution est quasiment complètement représentée par le deuxième mode (qui est bien le premier mode de torsion).

Les écarts constatés entre les deux courbes sont plus importants que ceux observés en flexion. Cela provient sans doute du fait que la forme obtenue en statique pour représenter l'état initial n'est pas tout à fait celle du premier mode de torsion.

5 Conclusions

- Dynamique sur base modale,
- Utilisation d'une base réduite,
- Souvent, les premiers modes suffisent à représenter correctement la solution,
- Certains modes ne participent pas,
- Un choix judicieux des modes de la base réduite peut simplifier la modélisation.

Références

- [1] Gibert R.J., *Vibrations des Structures - Intéractions avec les fluides - Sources d'excitations aléatoires*, Eyrolles, 1988.
- [2] Géraudin M. et Rixen D., *Théorie des Vibrations - Application à la dynamique des structures*, Masson, 1997.