

Vibrations des systèmes à 1 degré de liberté

1 Quelques exemples de modélisation

Le système à 1 degré de liberté constitue le modèle le plus simple d'une structure. En réalité les structures ne sont pas rigides, elles bougent et se déforment dans plusieurs directions; leur mouvement est donc constitué de plusieurs inconnues (une infinité). Cependant pour beaucoup de situations un modèle à 1 d.d.l. (quelquefois à 2 d.d.l.) permet une prédiction très satisfaisante du comportement de la structure, et présente l'avantage de pouvoir être résolu rapidement "à la main". De plus les phénomènes intervenant pour les systèmes à 1 d.d.l. et leur interprétation seront forcément présents dans les *systèmes discrets* (i.e. à n d.d.l.) et dans les *systèmes continus*. Ce chapitre constitue donc une base essentielle pour la suite du cours.

Il faut distinguer 2 systèmes à 1 d.d.l. : le système masse-ressort, *conservatif*, et le système masse-ressort-amortisseur, *dissipatif*, présentés sur la Fig. 1.

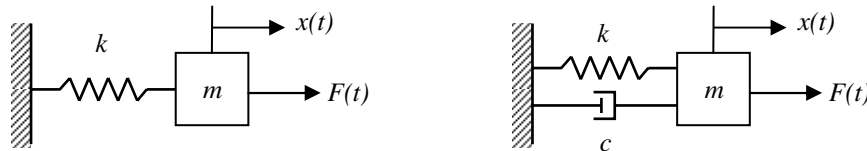


FIG. 1. Modélisations d'un système conservatif (gauche) et dissipatif (droite)

L'utilisation d'un modèle à 1 d.d.l. intervient lorsque l'on ne s'intéresse qu'au mouvement d'**un seul point** de la structure en mouvement dans **une seule direction** de l'espace. C'est par exemple le cas lorsque les mouvements dans les autres directions sont négligeables et lorsque un seul point présente un enjeu (par exemple il s'agit du seul point de mesure, ou bien le déplacement de ce point est critique pour la survie de la structure).

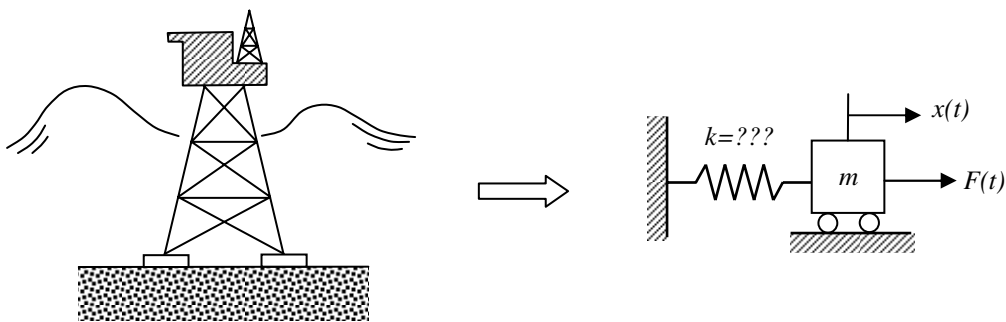


FIG. 2. Modélisation d'une plateforme offshore [8]

Prenons l'exemple d'une plateforme offshore soumise au chargement dynamique du courant marin (Fig. 2). La partie supérieure de la plateforme peut-être considérée comme rigide, et le mouvement principal est horizontal. Le ressort représente la rigidité de l'ensemble du treillis, la masse est celle de la partie supérieure (la masse du treillis est négligée). Remarquons qu'en 3D le mouvement horizontal a 2 composantes, il faudrait donc un modèle à 2 d.d.l. (translations sur x et y) ou 3 d.d.l. (translations sur x et y , et rotations autour de z) pour caractériser plus précisément le mouvement de la plateforme.

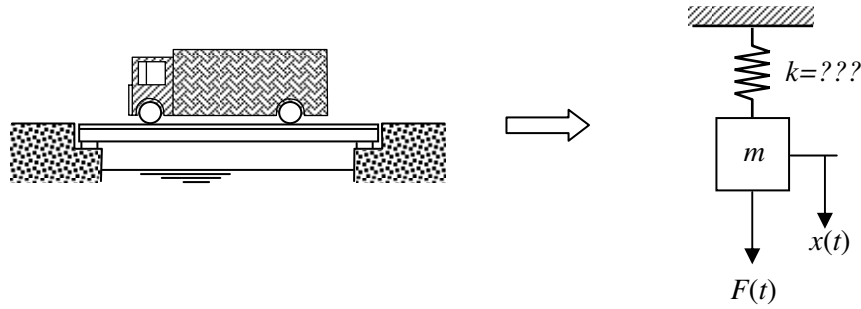


FIG. 3. Modélisation d'un pont chargé par un véhicule à l'arrêt [8]

Un autre exemple (Fig. 3) est celui d'un pont soumis au passage de véhicules dans lequel le dimensionnement se fait "à la flèche maximale". La quantité d'intérêt est donc la flèche au milieu du pont. La raideur du ressort est la *raideur équivalente* du pont, la masse est celle du véhicule. Ici encore le modèle est très simplifié puisque la réalité implique la masse répartie du pont (non négligeable devant celle du véhicule) et que le chargement est mobile sur le pont (on parle de charge mouvante).

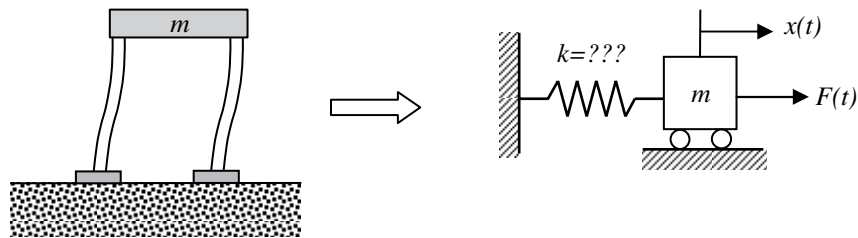


FIG. 4. Modélisation d'un bâtiment

Un autre exemple est celui d'un bâtiment de génie civil (Fig. 4), susceptible de subir un séisme. Le plancher est généralement considéré comme indéformable, tandis que les poteaux verticaux se déforment et constituent donc une rigidité. La quantité d'intérêt est le mouvement latéral. Remarquons ici que pour les bâtiments de plusieurs étages un modèle acceptable serait un système à n d.d.l., n étant le nombre d'étages.

Un exemple tiré de la mécanique est celui du déséquilibre d'une roue de voiture. Le phénomène revient à étudier l'effet du mouvement d'une masse en rotation autour d'un axe, et désaxée par rapport à l'axe de rotation. L'entraxe (distance entre la masse et l'arbre) en conjonction aux forces centrifuges crée des vibrations qui peuvent être néfastes pour l'essieu ou les amortisseurs. On peut également évoquer les mouvements des soupapes, qui sont rappelées par des ressorts de compression afin d'assurer l'étanchéité de la chambre de combustion.

2 Obtention des équations de mouvement

Une fois le modèle masse-ressort(-amortisseur) obtenu, l'équation de mouvement d'un système à 1 d.d.l. s'obtient assez simplement par diverses méthodes. Rappelons que toutes les méthodes ci-dessous sont **équivalentes** et découlent de la 2^e loi de Newton.

2.1 Principe fondamental de la dynamique (2^e loi de Newton)

Énoncé :

Dans un référentiel galiléen, l'accélération \ddot{x} subie par un corps de masse m est proportionnelle à la résultante des forces extérieures exercée sur cette masse, et inversement proportionnelle à m .

On se souvient plus généralement de cette loi sous la forme :

$$m \ddot{x} = \sum f_{\text{ext}} \quad (1)$$

Les relations de comportement du ressort et de l'amortisseur s'écrivent :

$$f_{\text{ressort}} = -k x \quad (2)$$

$$f_{\text{amort}} = -c \dot{x} \quad (3)$$

On obtient donc les équations de mouvement suivantes :

$$m \ddot{x} + k x = F \quad (\text{système conservatif}) \quad (4)$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F \quad (\text{système dissipatif}) \quad (5)$$

où F constitue la force d'excitation du système.

Remarque :

La relation de comportement du ressort (2) est écrite en considérant que la position d'équilibre est $x = 0$. Ce n'est pas le cas puisqu'un ressort réel a toujours une longueur à vide x_0 avec une relation de comportement de la forme $f_{\text{ressort}} = -k (x - x_0)$. On peut toutefois effectuer le changement de variable $\tilde{x} = x - x_0$ et la nouvelle inconnue \tilde{x} vérifie l'équation de mouvement (4) ou (5) selon le cas. Dans la suite on considèrera toujours la position nulle comme position d'équilibre, ce qui évite la lourdeur d'avoir x_0 dans les équations.

2.2 Équations de Lagrange

Les équations de Lagrange sont un outil très pratique pour obtenir les équations de mouvement notamment dans le cas de systèmes comprenant un paramétrage compliqué, par exemple en robotique. Il s'agit de l'expression du PFD sous une forme énergétique. Dans la suite il est exprimé pour les systèmes à plusieurs d.d.l. (de manière à n'apprendre qu'une seule formule) puis est appliqué sur les systèmes à 1 d.d.l.

2.2.1 Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable pour un système conservatif

On considère un système conservatif paramétré par N degrés de libertés généralisés (i.e. indépendants) notés q_i , et soumis à des forces dérivant d'un potentiel \mathcal{V} . Une position d'équilibre stable est caractérisée par :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{q}=0} = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots N\} \quad (6)$$

Dans cette expression, les d.d.l. généralisés sont mesurés à partir de la position d'équilibre : à l'équilibre $q_i = 0, \forall i$. Si ce n'est pas le cas, on peut effectuer le changement de variable $\tilde{q}_i = q_i - q_i^{\text{eq}}$ et le nouveau d.d.l. généralisé \tilde{q}_i prend alors la valeur nulle à la position d'équilibre.

Expression de l'énergie potentielle :

On peut effectuer un développement de Taylor autour de la position d'équilibre :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \mathcal{V}(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^N q_i \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} + \mathcal{O}(\mathbf{q}^2) \quad (7)$$

Le premier terme $\mathcal{V}(\mathbf{0})$ de ce potentiel est une constante qu'on peut la choisir arbitrairement. On le prend en général à 0. Si la position d'équilibre considérée est stable, le second terme est nul. Au second ordre, l'énergie potentielle s'exprime donc comme suit :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j k_{ij} \quad (8)$$

que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (9)$$

La matrice \mathbf{K} est appelée *matrice de raideur* ou *matrice de rigidité*. Remarquons que ses termes k_{ij} sont symétriques puisque la dérivation l'est :

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_j \partial q_i} \right)_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = k_{ji} \quad (10)$$

Remarquons également que c'est une matrice positive, du au fait que l'équilibre considéré est stable : $k_{ii} \geq 0, \forall i$. On précise souvent qu'elle est semi-définie, ce qui signifie que certaines valeurs propres peuvent être nulles (autrement dit, dans le cas général la matrice de raideur n'est pas strictement positive, c'est à dire définie positive).

Notions de forces généralisées :

Par définition, les forces généralisées Q_i dérivant du potentiel \mathcal{V} sont données par :

$$Q_i = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^N k_{ij} q_j = -(\mathbf{K} \mathbf{q})_i \quad (11)$$

Expression de l'énergie cinétique :

Pour un système de points matériels de masse m_i , on peut écrire l'énergie cinétique comme la somme de l'énergie cinétique de chaque point :

$$\mathcal{T}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i^2 \quad (12)$$

qu'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{T}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (13)$$

Ce résultat est également valable pour n'importe quel système discret. La matrice \mathbf{M} est appelée *matrice de masse*. Elle est symétrique définie positive (toutes ses valeurs propres sont strictement positives).

Remarquons enfin que l'énergie cinétique ne dépend pas des positions mais des vitesses :

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} = 0 \quad (14)$$

2.2.2 Équations de Lagrange pour un système conservatif

Un système en mouvement dont le mouvement est paramétré par des degrés de liberté généralisés (i.e. indépendants) notés q_i se caractérise par son énergie cinétique \mathcal{T} . Si le système est conservatif, il est soumis à des forces dérivant d'un potentiel \mathcal{V} et à des forces généralisées Q_i . Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad (15)$$

où $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ est le Lagrangien du système. Les notions de degré de liberté généralisé et de force généralisée seront expliquées sur les systèmes à plusieurs d.d.l.

Application au cas du système à 1 d.d.l. conservatif :

Le seul degré de liberté généralisé est $q = x$, la force généralisée est $Q = F$. L'énergie cinétique s'écrit : $\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, l'énergie potentielle (de déformation) est $\mathcal{V} = \frac{1}{2} k x^2$. En appliquant l'équation de Lagrange, on retrouve facilement l'équation (4).

2.2.3 Équations de Lagrange pour un système non conservatif

En présence de forces d'amortissement interne, on peut :

- soit considérer les forces dissipatives comme des forces externes, leur contribution est alors prise en compte dans l'expression des forces généralisées en lui ajoutant les forces généralisées Q_i^{diss} ,
- soit construire un *potentiel de dissipation* \mathcal{D} tel que $Q_i^{\text{diss}} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}$ et considérer l'équation de Lagrange écrite sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (16)$$

Dans le cas du *frottement visqueux*, ce potentiel de dissipation s'écrit sous une forme quadratique des vitesses :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

Dans ce cas, la matrice \mathbf{C} est appelée matrice d'amortissement ; elle est symétrique semi-définie positive.

Application au cas du système à 1 d.d.l. non conservatif :

On forme le potentiel de dissipation dont dérive la force de frottement visqueuse :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad (18)$$

L'application de l'équation de Lagrange redonne l'équation de mouvement (5).

Exercice : Trouver l'expression du potentiel de dissipation correspondant à une force de frottement sec ($f^{\text{diss}} = \text{constante}$) et à une force de traînée ($f^{\text{diss}} \propto \dot{x}^2$).

2.3 Principe des travaux virtuels

Le principe s'énonce comme suit : le travail virtuel des quantités d'accélération est égal à la somme du travail virtuel des efforts extérieurs et du travail virtuel des efforts intérieurs, quel que soit le déplacement virtuel respectant les conditions cinématiques.

Application au cas du système conservatif :

Notons δx le déplacement virtuel considéré. Le travail virtuel des forces intérieures (ressort) s'écrit :

$$\mathcal{W}_{\text{int}}^* = -k x \delta x \quad (19)$$

Le travail virtuel de la force extérieure s'écrit :

$$\mathcal{W}_{\text{ext}}^* = F \delta x \quad (20)$$

Le travail virtuel des quantités d'accélération s'écrit :

$$\mathcal{W}_{\text{acc}}^* = m \ddot{x} \delta x \quad (21)$$

En appliquant le PTV, on trouve :

$$m \ddot{x} \delta x = -k x \delta x + F \delta x, \quad \forall \delta x \quad (22)$$

Application au cas du système dissipatif :

Le travail virtuel des forces intérieures s'écrit maintenant :

$$\mathcal{W}_{\text{int}}^* = -k x \delta x - c \dot{x} \delta x \quad (23)$$

ce qui redonne le résultat attendu.

2.4 Principe d'Hamilton

Juste cité ici pour information. Il s'agit d'une version intégrée du principe des travaux virtuels.

3 Types d'excitations - types de problèmes - solutions associées

Dans la suite on s'intéresse à la résolution des équations (4) et (5) en fonction des différents types d'excitation possible.

3.1 Séparation statique/dynamique

La force d'excitation peut contenir une partie statique (indépendante du temps) et une partie dynamique :

$$F(t) = F_{\text{stat}} + F_{\text{dyn}}(t) \quad (24)$$

Dans ce cas la solution peut également être décomposée (la linéarité du problème est ici essentielle) en une partie statique et une partie dynamique :

$$x(t) = x_{\text{stat}} + x_{\text{dyn}}(t) \quad (25)$$

dans laquelle la partie statique vérifie l'équation statique ($\ddot{x}_{\text{stat}} = 0$) :

$$k x_{\text{stat}} = F_{\text{stat}} \quad (26)$$

La partie dynamique vérifie l'équation de mouvement habituelle :

$$m \ddot{x}_{\text{dyn}} + k x_{\text{dyn}} = F_{\text{dyn}} \quad (\text{système conservatif}) \quad (27)$$

$$m \ddot{x}_{\text{dyn}} + c \dot{x}_{\text{dyn}} + k x_{\text{dyn}} = F_{\text{dyn}} \quad (\text{système dissipatif}) \quad (28)$$

Le cours de dynamique ne s'intéresse qu'à la résolution de la partie dynamique, et pour plus de clarté on fera dans la suite l'hypothèse qu'il n'y a pas de partie statique dans le problème : $F = F_{\text{dyn}}$ et $x = x_{\text{dyn}}$.

3.2 Considérations mathématiques

Les considérations suivantes sont très importantes : on les retrouve dans l'étude de tous les systèmes linéaires. En outre le lien avec leur interprétation physique est particulièrement intéressant pour la résolution pratique des problèmes.

Les équations de mouvement (4) et (5) sont des *équations différentielles linéaire ordinaires du second ordre*. Ce dernier point indique que pour résoudre complètement l'équation, il faut se donner deux conditions : le plus courant est de disposer de la position et de la vitesse à **l'instant initial** : $x_0 = x(t = 0+)$ et $v_0 = \dot{x}(t = 0+)$, appelées *conditions initiales*.

Mathématiquement, la solution totale d'une équation différentielle linéaire peut s'écrire comme la superposition de la *solution générale de l'équation homogène* (i.e. sans second membre) et d'une *solution particulière de l'équation complète* :

$$x = x_{\text{SGEH}} + x_{\text{SPEC}} \quad (29)$$

On remarquera dans la suite que la SGEH existe toujours, même lorsqu'il n'y a pas d'excitation : il s'agit d'une partie de la solution qui est **indépendante de l'excitation**. L'équation différentielle étant d'ordre 2, la SGEH contient 2 inconnues (autrement dit l'espace solution de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2), qui seront déterminées grâce aux 2 conditions initiales.

La SPEC est une réponse particulière à l'excitation : elle est **indépendante des conditions initiales**. En pratique la SPEC peut être donnée analytiquement dans quelques cas précis d'excitation (excitation harmonique, ou périodique par exemple). Dans les autres cas on peut établir son expression sous une forme intégrale de l'excitation.

Remarque :

Sur les systèmes réels (toujours dissipatifs), la solution de l'équation homogène est toujours amortie, aussi cette partie de la solution devient négligeable devant la partie qui est dictée par l'excitation au bout d'un temps suffisant. Pour cette raison la SGEH est aussi appelée *solution en régime transitoire*, alors que la SPEC est désignée par *solution en régime permanent* ou *solution en régime établi*. Selon le type de problème considéré, on s'intéresse au régime transitoire, faisant intervenir à la fois la SPEC et la SGEH, ou au régime permanent, dans lequel seule la SPEC intervient.

Remarque pratique :

Lors de la résolution de problèmes, il faut garder à l'esprit que l'utilisation des conditions initiales se fait en dernier : on détermine d'abord la SGEH (incluant les inconnues) et la SPEC. Une fois la solution complète assemblée (et pas avant) on détermine la valeur des inconnues grâce aux conditions initiales.

3.3 Réponse d'un système conservatif

3.3.1 Vibrations libres

On appelle *vibrations libres* la solution à l'équation sans second membre : il n'y a pas de force d'excitation extérieure. Il s'agit de la réponse du système due uniquement aux conditions initiales. La forme de la réponse libre constitue toujours la solution générale de l'équation homogène, dans laquelle les inconnues sont fixées par les conditions initiales.

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (30)$$

La solution est recherchée sous la forme :

$$x(t) = x \exp(s t) \quad \text{où } x \text{ et } s \text{ sont complexes.} \quad (31)$$

En substituant dans l'équation de mouvement on obtient l'équation caractéristique du système :

$$m s^2 + k = 0 \quad (32)$$

dont les deux racines sont, en notant $j = \sqrt{-1}$:

$$s_{1,2} = \pm j \sqrt{k/m} = \pm j \omega_0 \quad (33)$$

La solution générale de l'équation homogène (30) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 \exp(s_1 t) + x_2 \exp(s_2 t) = x_1 (\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)) + x_2 (\cos(\omega_0 t) - j \sin(\omega_0 t)) \\ &= (x_1 + x_2) \cos(\omega_0 t) + j(x_1 - x_2) \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire sous l'une des formes générales suivantes (au choix) :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (34)$$

Pour le problème homogène, une SPEC est la solution nulle. Pour avoir la solution complète il suffit donc de déterminer le couple d'inconnues (A, B) (ou bien (C, φ) , ou bien (x_1, x_2)) grâce aux conditions initiales. On obtient :

$$A = x_0 \quad C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad (35)$$

$$B \omega_0 = v_0 \quad \varphi = \arctan\left(\frac{v_0}{x_0 \omega_0}\right) \quad (36)$$

d'où la forme finale de la réponse libre :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \cos\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{v_0}{x_0 \omega_0}\right)\right) \quad (37)$$

La quantité ω_0 est appelé *pulsation propre*, ou pulsation naturelle du système. C'est la pulsation à laquelle vibre le système non amorti sous l'effet des conditions initiales. Cette pulsation est caractéristique du système conservatif, et ne fait intervenir que les caractéristiques de raideur et de masse du système considéré. C est l'*amplitude* de la vibration, et φ est la *phase à l'origine*.

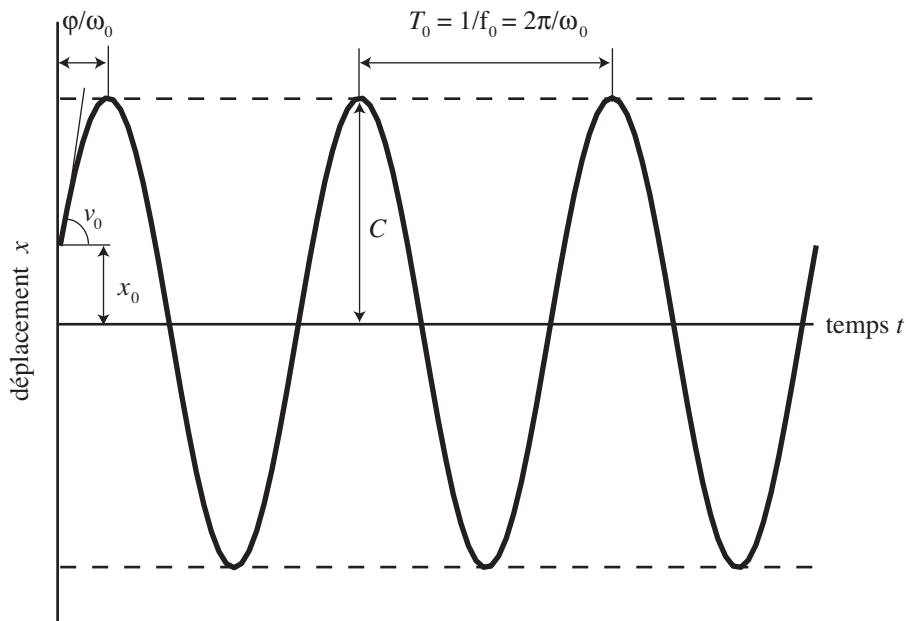


FIG. 5. Réponse libre d'un système conservatif

La réponse libre du système conservatif est présentée sur la Fig. 5. C'est une oscillation sinusoïdale à la fréquence $f_0 = \omega_0/2\pi$ dont l'amplitude reste constante. En effet, le système n'étant pas amorti, il n'y a ni perte d'énergie, ni gain d'énergie. Le système oscille à énergie constante (Fig. 6) :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \frac{1}{2}m \dot{x}^2 + \frac{1}{2}k x^2 \quad (38)$$

$$= \frac{1}{2}m v_0^2 + \frac{1}{2}k x_0^2 = \mathcal{E}(t = 0) \quad (39)$$

En fait le mouvement correspond à un transfert continu et parfait entre énergie de déformation et énergie cinétique. Remarquons pour finir que les vibrations libres correspondent à un mouvement sans apport d'énergie extérieure : la seule énergie qui fait bouger le système est l'énergie qui lui est donnée initialement, par l'intermédiaire de la position initiale x_0 (élongation initiale du ressort) ou par l'intermédiaire de la vitesse initiale v_0 (effet d'inertie de la masse m).

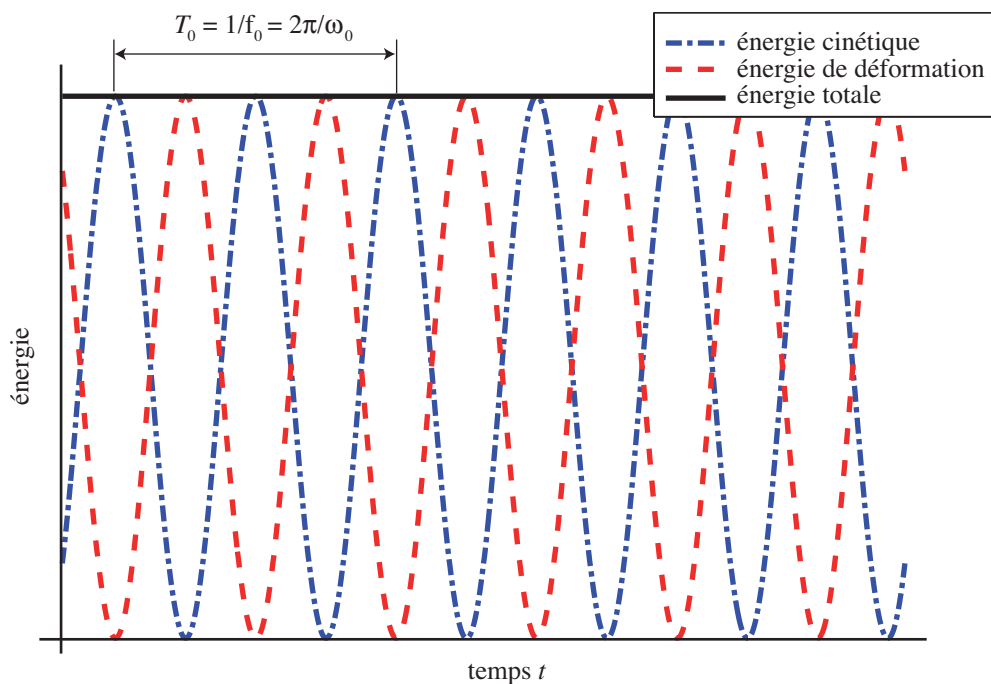


FIG. 6. Energies de la réponse libre

3.3.2 Vibrations forcées sous excitation harmonique

On s'intéresse à la réponse à une excitation de la forme :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (40)$$

L'équation des vibrations forcées harmoniques est donc :

$$m \ddot{x} + k x = F_0 \cos(\omega t) \quad (41)$$

L'étude de cette réponse est essentielle pour au moins deux raisons . Premièrement, d'un point de vue théorique, toute excitation peut se décomposer sous la forme d'une somme d'excitations harmoniques avec des phases et des pulsations différentes. Le système étant linéaire, on peut avoir sa réponse à l'excitation complexe en sommant les réponses à chaque excitation harmonique. Deuxièmement, d'un point de vue pratique, un certain nombre de structures sont

soumises à des sollicitations harmoniques : toutes les structures subissant le chargement d'une pièce tournante : moteur, pompe, engrenages, vilebrequins, etc.

Comme on l'a déjà remarqué la réponse contient deux contributions : la contribution x_{SGEH} due à la vibration naturelle du système, déjà exhibée au paragraphe précédent - ici c'est une vibration à la fréquence propre ω_0 - et la contribution x_{SPEC} due à l'excitation harmonique à la fréquence ω . Le système étant linéaire, il est habituel de chercher la SPEC sous la forme d'une réponse harmonique à la **même fréquence que l'excitation** :

$$x_{\text{SPEC}} = X \cos(\omega t) \quad (42)$$

En utilisant cette solution dans l'équation de mouvement, on trouve aisément :

$$X = \frac{F_0}{k - m \omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (43)$$

En ajoutant la SGEH trouvée au paragraphe précédent, la solution complète des vibrations forcées s'écrit sous la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \cos(\omega t) \quad (44)$$

dans laquelle les inconnues A et B sont déterminées par les conditions initiales. On trouve :

$$A = x_0 - \frac{F_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (45)$$

$$B = \frac{v_0}{\omega_0} \quad (46)$$

d'où la solution complète :

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \cos(\omega t) \quad (47)$$

Le système vibre donc à 2 fréquences : sa fréquence naturelle ω_0 et la fréquence imposée par l'excitation ω . Si ces deux fréquences sont proches, la réponse du système fait apparaître le phénomène de *battement* (onde porteuse et onde modulatrice), que l'on retrouvera sur les systèmes à 2 d.d.l.

En réalité l'amortissement n'étant pas nul - on n'est plus alors avec un système conservatif - la réponse due aux conditions initiales disparaît au bout d'un certain temps. Pour cette raison, on ne s'intéresse dans ce qui suit qu'au régime établi, qui correspond à la partie de l'excitation uniquement due à l'excitation extérieure :

$$x(t) = X \cos(\omega t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \cos(\omega t) = H(\omega) F_0 \cos(\omega t) \quad (48)$$

En notant $x_{\text{stat}} = F_0/k$ la solution statique à une force d'amplitude F_0 , on peut s'intéresser à l'influence de la fréquence sur l'amplitude de la réponse (Fig. 7) et sur la phase entre la réponse et l'excitation (Fig. 8).

Le diagramme de gain montre que lorsque la fréquence d'excitation est faible (devant la fréquence de résonance : $\omega \ll \omega_0$), le système oscille très lentement avec une amplitude qui est proche de la déflexion statique x_{stat} . Lorsque la fréquence d'excitation est très grande ($\omega \gg \omega_0$), l'amplitude de la réponse tend vers 0. Ceci est du au fait que l'excitation change de sens (de signe) tellement rapidement que le système n'a pas le temps de répondre aussi rapidement à cause de son inertie m . Lorsque la fréquence d'excitation s'approche de la fréquence

propre, on voit apparaître le phénomène de résonance pour lequel l’amplitude de la réponse permanente devient infinie (pour un système non amorti). Ceci s’explique par le fait que l’excitation change de sens exactement à la même vitesse que le système, et a donc toujours un rôle “moteur” qui augmente sans cesse l’amplitude de la réponse. Précisons enfin que le diagramme de gain, lorsqu’il est tracé en décibels, est appelé *diagramme de Bode*.

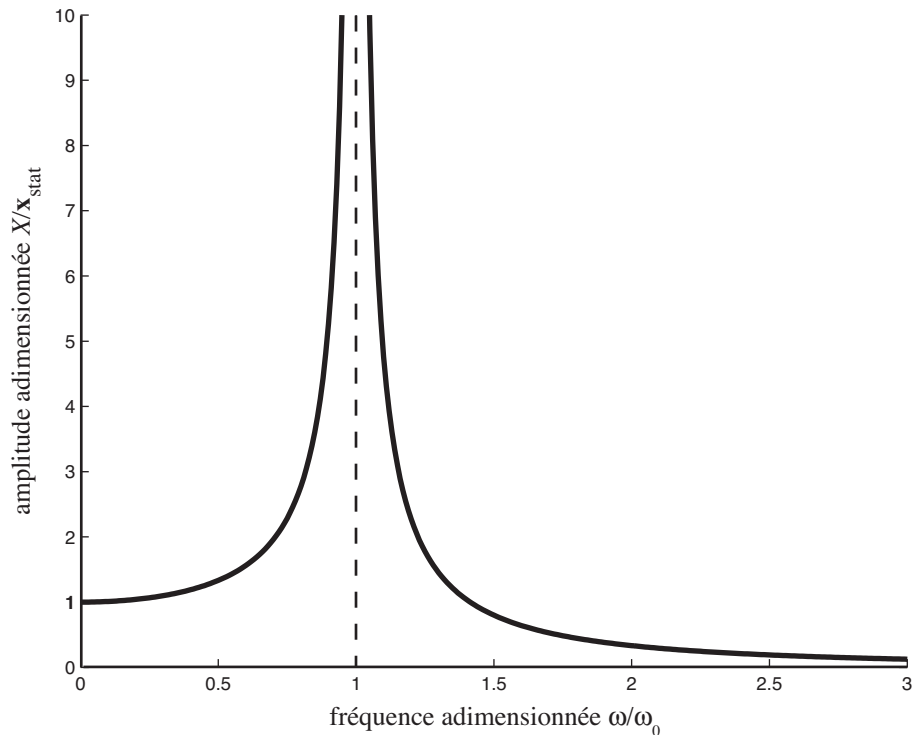


FIG. 7. Diagramme de gain du système conservatif

Le diagramme de phase montre que la phase entre l’excitation et la réponse est de 0° pour $\omega < \omega_0$: le système vibre *en phase* avec l’excitation (F_0 et x ont le même signe) ; et de -180° ($= +180^\circ$) pour $\omega > \omega_0$: le système et l’excitation sont en *opposition de phase* (F_0 et x ont des signes opposés puisque $x \cos(\omega t - \pi) = -x \cos(\omega t)$).

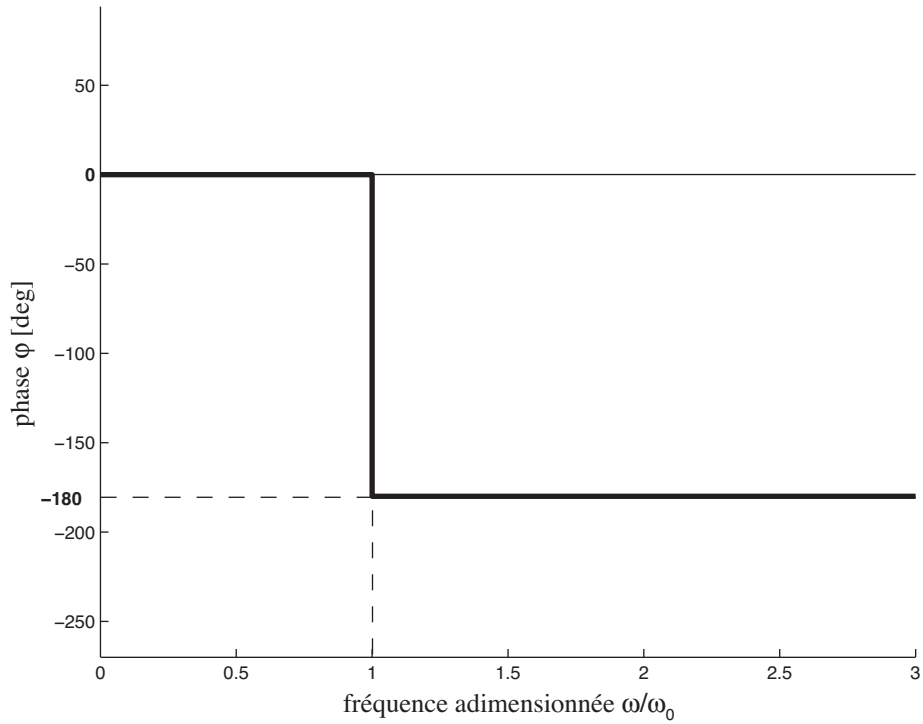


FIG. 8. Diagramme de phase du système conservatif

Il est important de comprendre que pic de résonance infini ne signifie pas qu'on ne peut pas exciter le système à cette fréquence de résonance ω_0 . Il signifie simplement qu'il n'y a pas de solution en régime établi à une excitation à cette fréquence. Cependant il est intéressant de voir comment évolue la réponse du système lorsqu'on le sollicite à la fréquence de résonance. En partant de conditions initiales nulles par exemple, on peut établir que la réponse est :

$$x(t) = \frac{F_0}{2k} \omega_0 t \sin(\omega_0 t) \quad (49)$$

Cette réponse est tracée sur la Fig. 9 et montre que l'amplitude croît linéairement en fonction du temps. Ici bien entendu l'énergie du système augmente avec le temps.

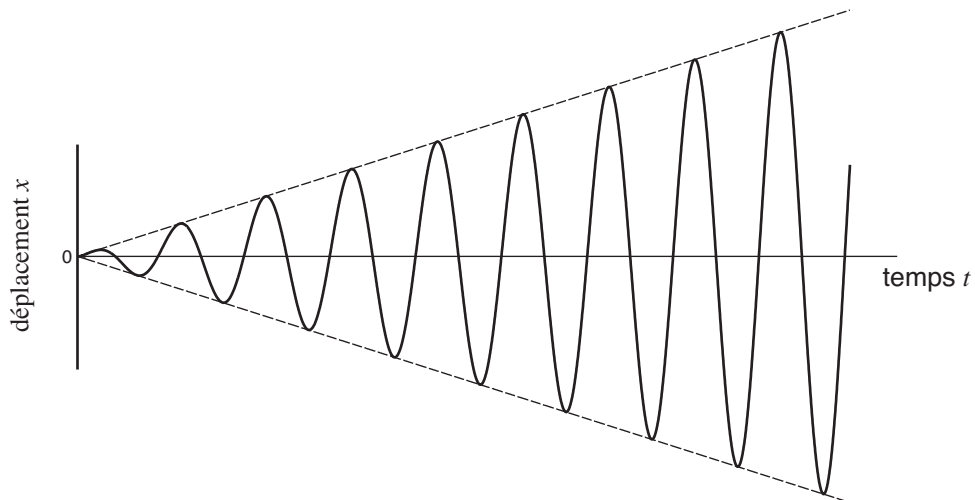


FIG. 9. Réponse à une excitation à la fréquence ω_0

Remarque : Fonction de transfert du système

En travaillant en complexe on se donne l'excitation harmonique $\bar{F} \exp(j \omega t)$ et la réponse (complexe) à cette excitation $\bar{x} \exp(j \omega t)$, où \bar{F} et \bar{x} sont complexes. On définit la fonction de transfert comme le rapport entre la réponse et l'excitation :

$$H(\omega) = \frac{\bar{x}}{\bar{F}} \quad (50)$$

L'intérêt de cette fonction est qu'elle est caractéristique du système considéré. Pour le système conservatif par exemple, elle vaut (cf Eq. (43)) :

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2} = \frac{1/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (51)$$

Au facteur $1/k$ prêt, les diagrammes de gain et de phase tracés précédemment sont la caractéristique de cette fonction de transfert.

3.3.3 Vibrations forcées sous excitation périodique

L'excitation harmonique étudiée précédemment reste un cas idéal, mais son étude est très importante car elle facilite énormément la compréhension et la résolution de systèmes soumis à une excitation périodique. L'idée repose sur deux ingrédients : le signal périodique peut facilement être décomposé en série de Fourier, et la linéarité du système, essentielle, permet d'obtenir la réponse comme étant la somme de la réponse à chacune des composantes de la série de Fourier. Cela revient donc à faire la somme de réponses harmoniques à des fréquences différentes, avec des déphasage différents.

Plus précisément, l'excitation peut s'écrire, en notant $T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$ la période du signal :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n \bar{\omega} t) + b_n \sin(n \bar{\omega} t)] \quad (52)$$

avec :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt \quad (53)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos(n \bar{\omega} t) dt \quad (54)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin(n \bar{\omega} t) dt \quad (55)$$

On peut également choisir une autre forme du développement qui fait apparaître les déphasages entre les différents termes :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n \bar{\omega} t - \varphi_n) \quad (56)$$

avec :

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (57)$$

$$\tan \varphi_n = \frac{b_n}{a_n} \quad (58)$$

Le calcul de la réponse se fait donc très simplement : soit $x_0 = \frac{a_0}{2k}$ la réponse (statique!) à l'excitation a_0 , x_n et Φ_n l'amplitude et la phase de la réponse à l'excitation $c_n \cos(n\bar{\omega}t - \varphi_n)$ qui se calcule comme dans le paragraphe précédent, le réponse harmonique se calcule par superposition :

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(n\bar{\omega}t - \Phi_n) \quad (59)$$

En utilisant la fonction de transfert précédente, on obtient :

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n |H(n\bar{\omega})| \cos(n\bar{\omega}t - \varphi_n - \arg H(n\bar{\omega})) \quad (60)$$

$$= \frac{a_0}{2} |H(0)| + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n |H(n\bar{\omega})| \cos(n\bar{\omega}t - \varphi_n - \arg H(n\bar{\omega})) \quad (61)$$

Le calcul de la réponse revient donc à multiplier chaque terme de l'excitation par le gain correspondant à sa fréquence, et à le déphaser par la phase correspondante à sa fréquence. En pratique, la connaissance de la fonction de transfert $H(\omega)$ permet entre autre de savoir quelles sont les fréquences qui seront amplifiées par le système (les zones de résonance) et de vérifier si ces fréquences font partie ou non du spectre de Fourier de l'excitation.

3.3.4 Réponse à une excitation quelconque

La réponse à une excitation quelconque peut être étudiée par diverses méthodes. On développe dans la suite la méthode de la transformée de Laplace.

Par définition, la transformée de Laplace d'une fonction temporelle $g(t)$ est une fonction $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt \quad (62)$$

En utilisant la fonction de Heaviside \mathcal{H} définie par :

$$\mathcal{H}(t - t_0) = 0 \quad t < t_0 \quad (63)$$

$$= 1 \quad t > t_0 \quad (64)$$

la transformation de Laplace vérifie des propriétés mathématiques très pratiques résumées dans le Tableau 1.

Propriétés	Domaine temporel	Domaine de Laplace
Définition	$g(t)$	$\int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt$
Linéarité	$a g_1(t) + b g_2(t)$	$a G_1(p) + b G_2(p)$
Dérivation	$\dot{g}(t)$ $\ddot{g}(t)$ $g^{(n)}(t)$	$p G(p) - g(0)$ $p^2 G(p) - p g(0) - \dot{g}(0)$ $p^n G(p) - p^{n-1} g(0) - \dots g^{(n-1)}(0)$
Intégration	$\int_0^{\infty} g(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} G(p)$
Convolution	$\int_0^t g_1(t - \tau) g_2(\tau) d\tau$	$G_1(p) G_2(p)$
Retard	$g(t - t_0) \mathcal{H}(t - t_0), \quad t_0 > 0$	$G(p) \exp(-t_0 p)$

FIG. 9. Propriétés de la transformée de Laplace

L'utilisation de ces propriétés s'avère extrêmement commode pour traiter les problèmes de dynamiques linéaires. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation de mouvement, on obtient dans le domaine de Laplace :

$$m(p^2 X(p) - p x_0 - v_0) + k X(p) = F(p) \quad (65)$$

d'où

$$X(p) = \frac{1}{m p^2 + k} F(p) + \frac{1}{m p^2 + k} (p x_0 + v_0) \quad (66)$$

$$= \frac{1}{Z(p)} F(p) + \frac{CI(p)}{Z(p)} F(p) \quad (67)$$

$Z(p)$ est appelée *impédance opérationnelle*. Sous cette forme on voit très bien apparaître la séparation entre la partie de la réponse venant de l'excitation ($F(p)$) et la partie de la réponse venant des conditions initiales ($CI(p)$), qui disparaît si celles-ci sont nulles.

Utilisation pratique

En pratique, l'utilisation de cet outil se fait selon la séquence suivante :

- calcul de la TL de l'équation du système (équation de mouvement) : on obtient la fonction de transfert $1/Z(p)$ du système que l'on peut étudier (résonances, stabilité, etc),
- calcul de la TL de l'excitation $F(p)$: si l'excitation $F(t)$ a une forme définie remarquable, on peut en déduire facilement sa transformée dans le domaine de Laplace grâce au tableau de correspondance 2,
- calcul de la réponse dans le domaine de Laplace, en tenant compte des conditions initiales si besoin : il suffit de multiplier $1/Z(p)$ et $F(p) + CI(p)$,
- grâce au tableau de correspondance, on peut en déduire (dans certains cas) la réponse temporelle $x(t)$.

$g(t)$	$G(p)$
1	$1/p$
t	$1/p^2$
$t^n/n!$	$1/p^{n+1}$
$1/\sqrt{\pi t}$	$1/\sqrt{p}$
$\exp(-at)$	$1/(p+a)$
$t \exp(-at)$	$1/(p+a)^2$
$t^n \exp(-at)/n!$	$1/(p+a)^{n+1}$
$\frac{\exp(-at) - \exp(-bt)}{b-a} \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{a \exp(-at) - b \exp(-bt)}{a-b} \quad (a \neq b)$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{a} \sin(at)$	$\frac{1}{p^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\frac{1}{a} \sinh(at)$	$\frac{1}{p^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
$\frac{1}{a^2}(1 - \cos(at))$	$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$
$\frac{1}{a^3}(at - \sin(at))$	$\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}$
$\frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at \cos(at))$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$
$\frac{t}{2a} \sin(at)$	$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{2a}(\sin(at) + at \cos(at))$	$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$
$t \cos(at)$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$\frac{\cos(at) - \cos(bt)}{b^2-a^2} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
$\frac{1}{b} \exp(-at) \sin(bt)$	$\frac{1}{(p^2+a^2)+b^2}$
$\exp(-at) \cos(bt)$	$\frac{p+a}{(p^2+a^2)+b^2}$

FIG. 9. Transformées de Laplace usuelles

3.4 Réponse d'un système dissipatif

Le système conservatif est un système qui ne dissipe pas d'énergie. Dans la réalité, tous les systèmes perdent de l'énergie au cours du mouvement ce qui nous invite à en tenir compte dans les équations. La question de la modélisation des forces de dissipation est un point compliqué. Le modèle le plus employé est l'amortissement visqueux, dans lequel la force de frottement est proportionnelle à la vitesse. Citons également le cas du frottement sec (frottement constant mais de signe opposé à la vitesse) et la force de traînée (proportionnelle au carré de la vitesse). La résolution de ces deux derniers cas est plus compliquée - la force étant une fonction non linéaire de \dot{x} - et n'est pas abordée dans la suite.

3.4.1 Vibrations libres

En l'absence de second membre, l'équation de mouvement (5) peut être réécrite sous la forme canonique suivante :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (68)$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (69)$$

ξ est le taux d'amortissement, c_c est l'amortissement critique.

En cherchant la solution sous la forme d'une exponentielle complexe (31), on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2 = 0 \quad (70)$$

dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) \quad (71)$$

La forme de la solution dépend du signe de Δ et il faut donc séparer 3 cas selon son signe.

1er cas : $\xi < 1$: régime pseudo-périodique, ou sous-critique ($\Delta < 0$)

C'est le cas où l'amortissement est faible. Les racines sont :

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad (72)$$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$x(t) = (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)) e^{-\xi\omega_0 t} \quad (73)$$

que l'on peut encore mettre sous la forme :

$$x(t) = C \cos(\omega_d t - \varphi_d) e^{-\xi\omega_0 t} \quad (74)$$

Dans les deux formes ci-dessus, les deux constantes sont déterminées par les conditions initiales :

$$A = x_0 \quad C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_d}\right)^2} \quad (75)$$

$$B = \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_d} \quad \tan \varphi_d = \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{x_0\omega_d} \quad (76)$$

On a défini la pulsation ω_d , pulsation propre du système amorti :

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad (< \omega_0) \quad (77)$$

Le système oscille à la pulsation ω_d avec une amplitude décroissant exponentiellement. L'amplitude est donnée par l'enveloppe $C \exp(-\xi\omega_0 t)$. La réponse est tracée Fig. 10.

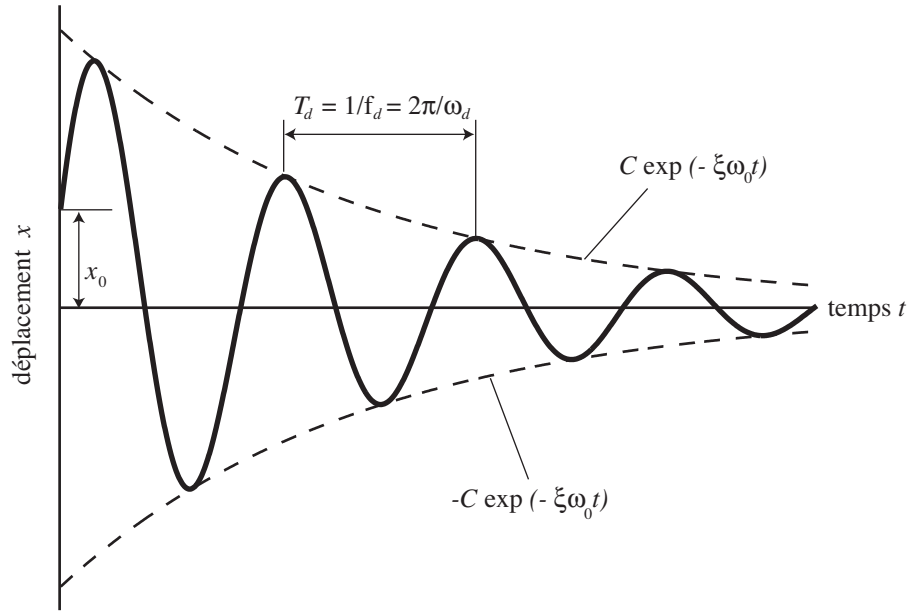


FIG. 10. Réponse libre d'un système dissipatif sous-critique

2e cas : $\xi = 1$: régime critique ($\Delta = 0$)

Lorsque l'amortissement atteint la valeur critique, les racines sont :

$$s_1 = s_2 = -\xi\omega_0 = -\omega_0 \quad (78)$$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t} \quad (79)$$

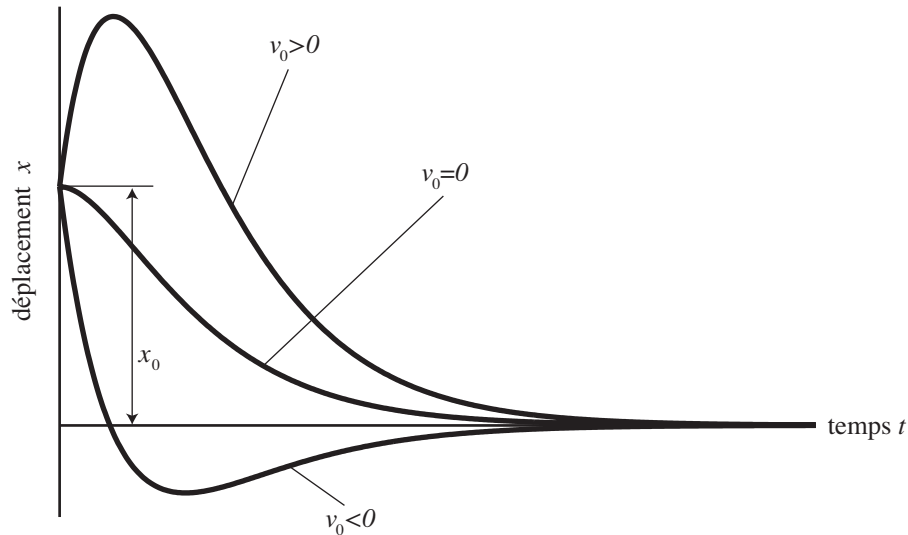


FIG. 11. Réponse libre d'un système dissipatif en régime critique

3e cas : $\xi > 1$: régime sur-critique ou aperiodique ou sur-amorti ($\Delta > 0$)

Lorsque l'amortissement dépasse la valeur critique, les racines sont :

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (80)$$

et la solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$x(t) = A e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t} + B e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t} \quad (81)$$

A et B dépendent comme toujours des conditions initiales :

$$A = \frac{x_0 \omega_0 (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) - v_0}{2\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (82)$$

$$B = \frac{x_0 \omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) + v_0}{2\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (83)$$

Le premier terme s'amortit rapidement contrairement au second qui s'amortit plus lentement. Un exemple de solution est tracé sur la Fig. 12. La réponse tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini (concrètement : après un temps suffisant, on peut considérer que le système est au repos).

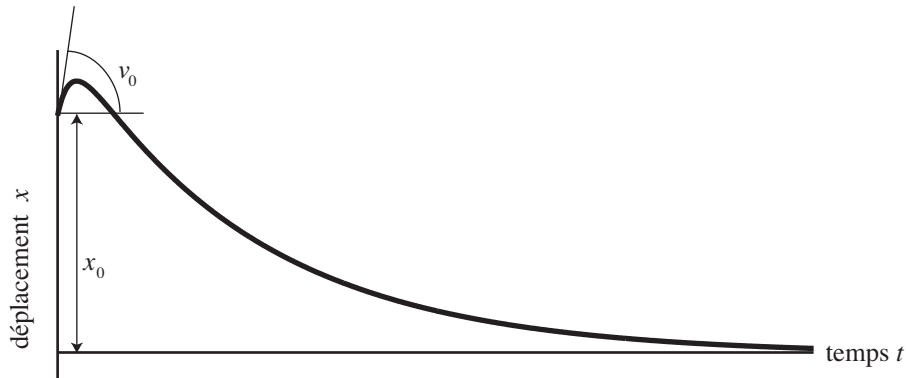


FIG. 12. Réponse libre d'un système dissipatif en régime sur-critique

3.4.2 Vibrations forcées sous excitation harmonique

La solution générale de l'équation homogène a la même forme que la solution des vibrations libres. On ne s'intéresse donc qu'à la solution en régime établi.

Une première méthode, peu usitée, consiste à travailler en réel et à chercher la SPEC sous la forme :

$$x_{\text{SPEC}} = X \cos(\omega t - \varphi) \quad (84)$$

En effet le terme d'amortissement introduit un déphasage entre l'excitation et la réponse. En injectant cette solution dans l'équation de mouvement, on parvient après calculs à :

$$X = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \omega_0^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\xi^2 (\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \quad (85)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\xi \omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\xi (\frac{\omega}{\omega_0})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (86)$$

Méthode des complexes

Bien plus pratique est la méthode des complexes. On cherche maintenant la réponse à l'excitation complexe $F_0 \exp(j \omega t)$ en cherchant la solution sous la même forme : $\bar{x} = \bar{X} \exp(j \omega t)$. Le lien avec les quantités réelles est direct en prenant la partie réelle des grandeurs complexes :

$$F_0 \cos(\omega t) = \mathcal{Re}(F_0 \exp(j \omega t)) \quad (87)$$

$$X \cos(\omega t - \varphi) = \mathcal{Re}(\bar{X} \exp(j \omega t)) \quad (88)$$

L'intérêt est que le déphasage introduit par l'amortissement est maintenant contenu dans la partie imaginaire des quantités.

En injectant la solution \bar{x} dans l'équation de mouvement, on aboutit directement à l'équation :

$$((j\omega)^2 + 2\xi\omega_0(j\omega) + \omega_0^2) \bar{X} = \frac{F_0}{m} \quad (89)$$

qui donne la solution complexe :

$$\bar{X} = \frac{F_0/m}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_0(j\omega) + \omega_0^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\xi\omega_0\omega} = \frac{F_0/k}{1 + 2j\xi(\frac{\omega}{\omega_0}) - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (90)$$

La méthode des complexes est donc très pratique puisque le calcul de \bar{x} est simple et permet d'obtenir rapidement le déphasage $\varphi = \arg \bar{X}$ et l'amplitude $|X| = |\bar{X}|$. Rappelons qu'à cette solution en régime établi il convient d'ajouter la SGEH pour avoir la solution complète.

Quelques remarques s'imposent en considérant le diagramme de gain (Fig. 13). Comme dans le cas amorti, la solution tend vers la solution statique $x_{\text{stat}} = F_0/k$ vers les basses fréquences et tend vers 0 vers les hautes fréquences. La différence principale concerne la fréquence de résonance : pour un système amorti la fréquence de résonance diffère de la fréquence propre. En effet, l'amplitude des vibrations vaut :

$$|\bar{x}| = \frac{|F_0|/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}} = \frac{|F_0|/k}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\xi^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \quad (91)$$

Rappelons que F_0/k correspond à la réponse statique du système. Par dérivation, on obtient que la réponse atteint son maximum pour la pulsation de résonance définie par :

$$\omega_{\text{rés}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (< \omega_d < \omega_0) \quad (92)$$

et que ce maximum vaut :

$$|\bar{x}(\omega_{\text{rés}})| = \frac{F_0/k}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (93)$$

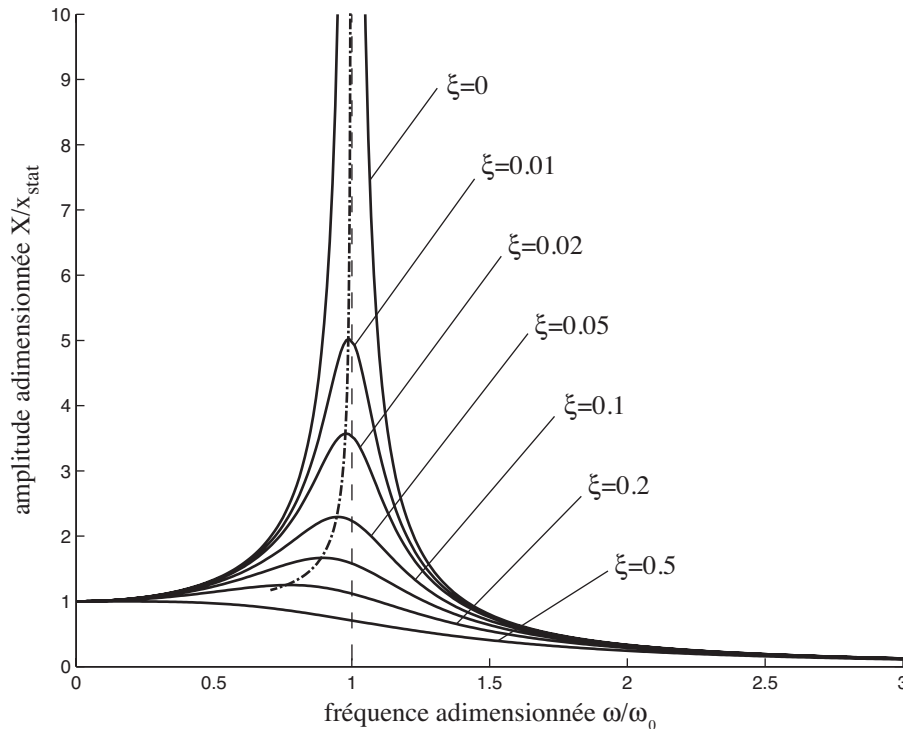


FIG. 13. Diagramme de gain du système amorti

Le diagramme de phase (Fig. 14) montre que la réponse est en phase pour les basses fréquences et se déphase progressivement jusqu'à atteindre l'opposition de phase aux hautes fréquences. Pour la fréquence propre $\omega = \omega_0$ la phase vaut -90° quel que soit le taux d'amortissement.

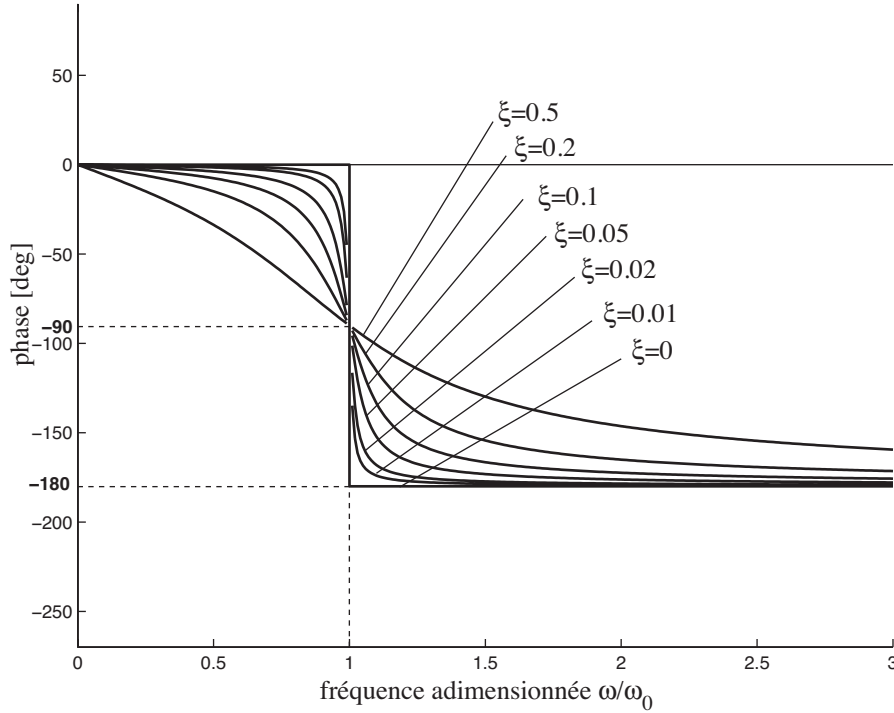


FIG. 14. Diagramme de phase du système amorti

3.4.3 Vibrations forcées sous excitation périodique

La méthode utilisée pour le système conservatif s'applique toujours : l'excitation est décomposable en série de Fourier, qui constitue une somme d'excitations harmoniques. Par linéarité la réponse s'écrit donc comme la somme des réponses à chaque terme de la série. On peut également travailler en complexe pour gérer séparément chaque composante.

3.4.4 Réponse à une excitation quelconque

On applique également la méthode vue pour le système conservatif, basée sur la transformation de Laplace.

Exemple : réponse impulsionnelle avec conditions initiales nulles

La fonction $\delta(t)$ définissant une impulsion a pour transformée de Laplace $F(p) = 1$. L'équation satisfaite par $x(t)$ est :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \quad (94)$$

La transformation de Laplace donne :

$$(m p^2 + c p + k) X(p) = F(p) = 1 \quad (95)$$

La réponse s'écrit donc :

$$X(p) = \frac{1/m}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{1/m}{(p + \xi\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})^2} \quad (96)$$

$$= \frac{1/m}{\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}}{(p + \xi\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})^2} \quad (97)$$

d'où l'on déduit la forme temporelle de la réponse :

$$x(t) = \frac{1/m}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} t) e^{-\xi \omega_0 t} \quad (98)$$

Exercice : réponse impulsionnelle avec conditions initiales non nulles

Montrer qu'en tenant compte de conditions initiales non nulles, la réponse s'écrit :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{1/m + v_0 + \xi \omega_0 x_0}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} t) e^{-\xi \omega_0 t} \quad (99)$$

Exercice : réponse indicielle

La réponse indicielle correspond à la réponse à un échelon unité $\mathcal{H}(t)$. La transformée de Laplace en est $1/p$. On pourra calculer la réponse du système avec et sans conditions aux limites à cet échelon.

Références

- [1] F. Axisa. *Modélisation des systèmes mécaniques. Vol. I : systèmes discrets*. Hermès Science Publications, Paris, 2001.
- [2] F. Axisa. *Modélisation des systèmes mécaniques. Vol. II : systèmes continus*. Hermès Science Publications, Paris, 2001.
- [3] M. Bruneau. *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, 1983.
- [4] M. Del Pedro and P. Pahud. *Mécanique vibratoire des systèmes linéaires discrets*. Presses pPolytechniques et Universitaires Romanedes, Lausanne, 1989.
- [5] J.-L. Guyader. *Vibrations des milieux continus*. Hermès, Paris.
- [6] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1992.
- [7] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures*. Eyrolles, Paris.
- [8] A. Metrikine. Dynamics of systems and slender structures. Technical report, TU Delft.
- [9] H.J.P. Morand and R. Ohayon. *Interaction fluide-structure*. Lavoisier, Paris.
- [10] M. Roseau. *Vibrations des systèmes mécaniques, méthodes analytiques et applications*. Masson, Paris, 1984.
- [11] S. Timoshenko, D. Young, and W. Weaver. *Vibration problems in engineering*. Wiley, 1974.