

Déformation des barres - Treillis

Exercices et éléments de corrections

Laurent Champaney

7 mars 2007

Résumé

Ce document présente quelques exercices et corrigés sur la déformation des barres élastiques avec application aux treillis plans. Ces exercices sont utilisés en première année de Licence de Sciences (première année de DEUG Sciences)

1 Enoncés

1.1 Barreau en traction

On considère un barreau cylindrique déformable en acier encastré à l'une de ses extrémités et soumis à un effort de traction F à l'extrémité opposée. Les caractéristiques du barreau sont un module d'Young $E = 20000\text{MPa}$, un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, une section $S = 15\text{cm}^2$ et une longueur $L = 1\text{m}$.

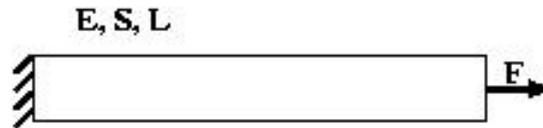


FIG. 1: Barreau en traction

1. Calculer l'effort F_{max} admissible pour ce barreau sachant que la contrainte de traction maximale admissible σ_e pour ce matériau est de 250MPa . Donner l'allongement du barreau pour cet effort maximal ainsi que la réduction du diamètre.
2. Le volume de la barre a-t-il changé ? Donner la variation de volume.

1.2 Système isostatique

On considère deux barres déformables rigidement liées entre elles. L'une est encastrée à l'une de ses extrémités et l'autre est soumise à un effort F à l'extrémité opposée. Les caractéristiques des barres sont des modules d'Young E_1 et E_2 , des sections S_1 et S_2 et des longueurs L_1 et L_2 .

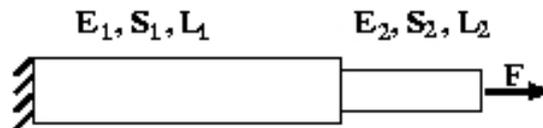


FIG. 2: Barres en série : problème isostatique

1. Quels sont les efforts intérieurs dans les deux barres. En déduire les contraintes.
2. Calculer le déplacement de l'extrémité soumise au chargement F

1.3 Système hyperstatique

On considère les deux barres déformables représentées sur la figure suivante. Elles sont encastrées d'un côté et liées à une barre indéformable de l'autre. Cette barre est soumise à un effort F . Les caractéristiques des barres sont des modules d'Young E_1 et E_2 , des sections S_1 et S_2 et des longueurs identiques L .

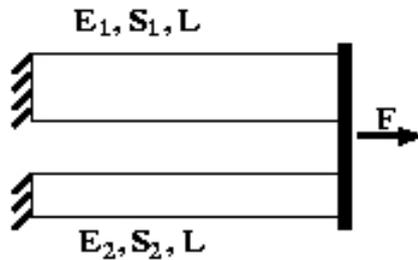


FIG. 3: Barres en parallèle : problème hyperstatique

1. Quelle relation lie les efforts intérieurs dans les deux barres ?
2. Quelle relation lie les allongements des deux barres ? En déduire les efforts intérieurs et les contraintes dans les barres.
3. Calculer le déplacement de la pièce rigide.

1.4 Traction inhomogène

On considère la cas d'une barre suspendue soumise seulement à son poids propre. La surface de sa section est S et h est la hauteur totale de cette barre. Le module d'Young du matériau est noté E et ρ est sa masse volumique.

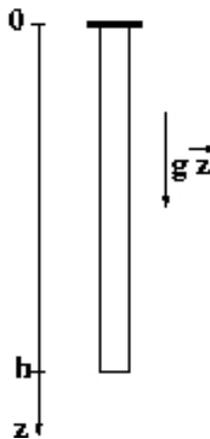


FIG. 4: Barre soumise à son propre poids

1. En réalisant une coupure de la barre, déterminer l'effort normal et la contrainte dans toute section d'altitude z de la barre.
2. En déduire la déformation en tout point. La déformation est-elle homogène ?
3. Quelle est la relation entre le déplacement et la déformation dans une telle situation ?
4. En déduire le déplacement en toute section de la barre.
5. Donner l'expression de l'allongement de la barre.

1.5 Treillis isostatique à 2 barres

On considère un treillis constitué de deux barres (nommées 1 et 2) disposées selon le schéma de la figure ???. Les barres sont élastiques et ne travaillent qu'en traction ou en compression. Les appuis A et B sont fixes. Les deux barres sont élastiques de sections S_1 et S_2 et de même module d'Young E. Le noeud A est soumis à un effort vertical descendant P. Les deux barres ont la même longueur L et on pose $AC = \sqrt{2}L$.

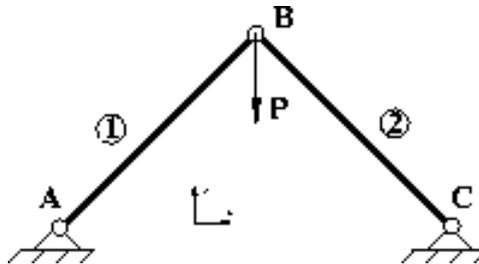


FIG. 5: Treillis à 2 barres

1. Peut-on calculer les réactions aux appuis en réalisant l'équilibre global du treillis ?
2. Ecrire l'équilibre des noeuds et en déduire les tensions dans chaque barre et les réactions dans les appuis. Quelles sont les barres en traction et les barres en compression ?
3. Calculer les allongements des barres.
4. Donner les relations entre le déplacement du noeud B et les allongements des barres. En déduire le déplacement du noeud B. Etudier les cas où $S_1 = S_2$, $S_1 \leq S_2$ et $S_1 \geq S_2$.

1.6 Treillis isostatique à 3 barres

On considère le treillis représenté sur la figure ci-dessous. Les trois barres sont identiques de même module E, même section S. Les longueurs sont telles qu'indiqué sur la figure. Le noeud A est lié au bâti par un appui mobile et le noeud B par un appui fixe. Le noeud C est soumis à l'effort F représenté sur la figure.

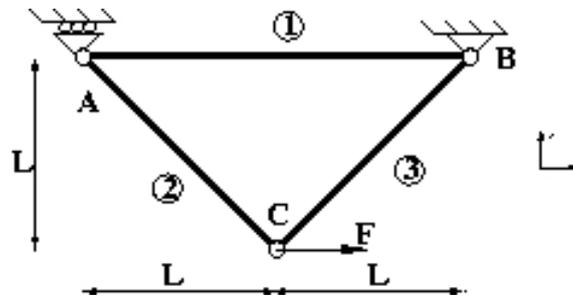


FIG. 6: Treillis à 3 barres

1. En réalisant l'équilibre global du treillis, calculer les réactions aux appuis.
2. Ecrire l'équilibre des noeuds et en déduire les tensions dans chaque barre. Quelles sont les barres en traction et les barres en compression ?
3. La contrainte limite admissible du matériau est σ_e . Quelle est la valeur F_{max} maximale admissible pour l'effort F ?
4. En écrivant la relation de comportement pour chaque barre. Donner les expressions des allongements en fonction de F.
5. Donner la relation générale reliant l'allongement d'une barre aux déplacements de ses extrémités.
6. On note les déplacements des noeuds de la manière suivante :

$$\vec{u}_A = u_A \vec{x} + v_A \vec{y}, \quad \vec{u}_B = u_B \vec{x} + v_B \vec{y}, \quad \vec{u}_C = u_C \vec{x} + v_C \vec{y}$$

- Ecrire les conditions d'appuis en A et B
- Ecrire les relations entre les allongements des trois barres et le déplacement des noeuds.
- En déduire le déplacement des noeuds.

1.7 Treillis isostatique à 5 barres

On considère le treillis représenté sur la figure ci-dessous. Les cinq barres sont identiques de même module E , même section S . Les longueurs sont telles qu'indiqué sur la figure. Le noeud C est lié au bâtiment par un appui mobile et le noeud A par un appui fixe. Le noeud C est soumis à l'effort F représenté sur la figure.

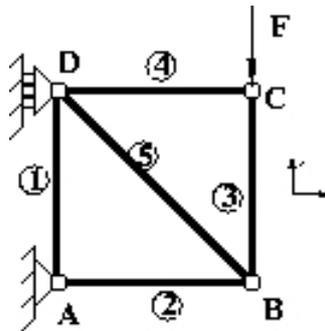


FIG. 7: Treillis à 3 barres

- Ecrire l'équilibre des noeuds et en déduire les tensions dans chaque barre et les réactions aux appuis. Quelles sont les barres en traction et les barres en compression ?
- La contrainte limite admissible du matériau est σ_e . Quelle est la valeur F_{max} maximale admissible pour l'effort F ?
- En écrivant la relation de comportement pour chaque barre. Donner les expressions des allongements en fonction de F .
- Donner la relation générale reliant l'allongement d'une barre aux déplacements de ses extrémités.
- On note les déplacements des noeuds de la manière suivante :

$$\vec{u}_A = u_A \vec{x} + v_A \vec{y}, \quad \vec{u}_B = u_B \vec{x} + v_B \vec{y}, \quad \vec{u}_C = u_C \vec{x} + v_C \vec{y}, \quad \vec{u}_D = u_D \vec{x} + v_D \vec{y}$$

- Ecrire les conditions d'appuis en A et B
- Ecrire les relations entre les allongements des trois barres et le déplacement des noeuds.
- En déduire le déplacement des noeuds.

2 Eléments de correction

2.1 Barreau en traction

- Pour calculer l'effort normal dans le barreau, on réalise une coupure (voir figure ??) :

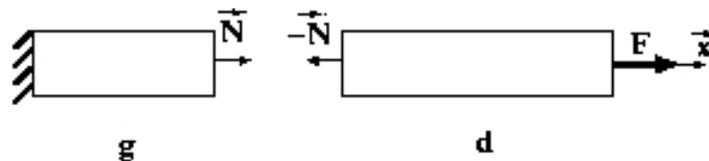


FIG. 8: Coupure dans le barreau

L'équilibre de la partie droite donne :

$$-\vec{N} + \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F$$

L'effort est donc homogène dans le barreau. La contrainte est :

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{F}{S}$$

qui est positive (car F l'est). Le barreau est donc en traction. La limite est atteinte pour :

$$\sigma = \sigma_e \Rightarrow \frac{F_{max}}{S} = \sigma_e \Rightarrow F_{max} = \sigma_e S = 3.75 \cdot 10^5 N$$

L'allongement est :

$$\Delta L = L\varepsilon = L \frac{\sigma}{E}$$

et à la limite :

$$\Delta L_{max} = L \frac{\sigma_e}{E} = 1.25 \cdot 10^{-3} m = 1.25 mm$$

La variation de diamètre est :

$$\Delta D = -\nu D \varepsilon = -\nu D \frac{\sigma}{E}$$

et à la limite :

$$\Delta D_{max} = -\nu D \frac{\sigma_e}{E} = -\nu \sqrt{\frac{4S}{\pi}} \frac{\sigma_e}{E} = -1.64 \cdot 10^{-5} m = -1.64 \cdot 10^{-2} mm$$

2. Le coefficient de Poisson est plus petit que 0.5, donc il y a augmentation du volume de la valeur :

$$\Delta V = \pi D^2 \Delta L (1 - 2\nu) = 3 \cdot 10^{-6} m^3$$

2.2 Système isostatique

1. Pour calculer l'effort normal dans la barre 1, on réalise une coupure dans cette barre (voir figure ??) :

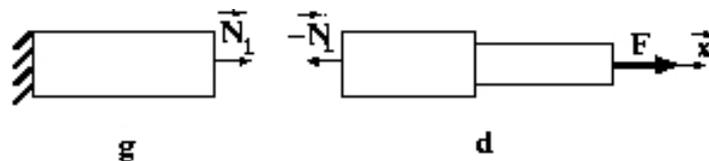


FIG. 9: Coupure dans la barre 1

L'équilibre de la partie droite donne :

$$-\vec{N}_1 + \vec{F} = 0 \Rightarrow N_1 = F$$

Pour calculer l'effort normal dans la barre 2, on réalise une coupure dans cette barre (voir figure ??) :

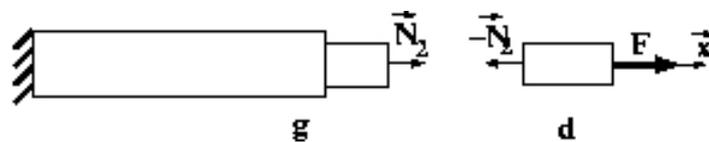


FIG. 10: Coupure dans la barre 2

L'équilibre de la partie droite donne :

$$-\vec{N}_2 + \vec{F} = 0 \Rightarrow N_2 = F$$

Les deux efforts sont donc homogènes et égaux. Ils ne dépendent pas du comportement des barres. Les contraintes sont obtenues directement :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{F}{S_1} ; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{F}{S_2}$$

2. Les déformations sont donc :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{F}{E_1 S_1} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{F}{E_2 S_2}$$

et les allongements des deux barres :

$$\Delta L_1 = \varepsilon_1 L_1 = \frac{F L_1}{E_1 S_1} \quad ; \quad \Delta L_2 = \varepsilon_2 L_2 = \frac{F L_2}{E_2 S_2}$$

Le déplacement de la section soumise au chargement est l'allongement total de la barre :

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{F L_1}{E_1 S_1} + \frac{F L_2}{E_2 S_2}$$

2.3 Système hyperstatique

1. Il n'est pas possible de réaliser une coupure dans l'une ou l'autre des deux barres en ouvrant isoler la partie gauche ou la partie droite : le problème est hyperstatique. On réalise la coupure présentée sur la **figure ??** :

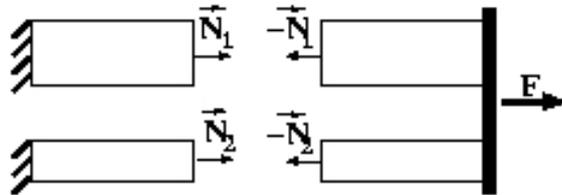


FIG. 11: Coupure dans les barres 1 et 2

En isolant les deux parties droites et la barre indéformable, on obtient :

$$-\vec{N}_1 - \vec{N}_2 + \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 = F$$

Nous avons simplement une relation entre les deux efforts.

2. Pour résoudre, on constate que, la barre indéformable ne pouvant pivoter, les allongement des deux barres sont égaux :

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 L = \varepsilon_2 L \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

En utilisant le comportement des barres on obtient :

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{E_1 S_1} = \frac{N_2}{E_2 S_1}$$

En utilisant les deux équations portant sur le efforts intérieurs, on peut les calculer :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{F E_1 S_1}{E_1 S_1 + E_2 S_2} \\ N_2 = \frac{F E_2 S_2}{E_1 S_1 + E_2 S_2} \end{cases}$$

et les contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{F E_1}{E_1 S_1 + E_2 S_2} \\ \sigma_2 = \frac{F E_2}{E_1 S_1 + E_2 S_2} \end{cases}$$

3. Le déplacement de la section soumise au chargement est l'un ou l'autre de deux allongements, puisqu'ils sont égaux :

$$\Delta L = \frac{F L}{E_1 S_1 + E_2 S_2}$$

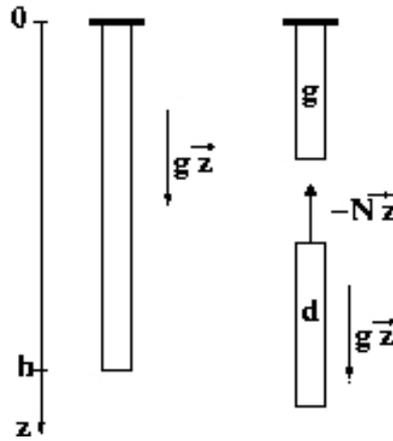


FIG. 12: Coupure dans la barre soumise à son propre poids

2.4 Traction inhomogène

1. On réalise un coupure de la barre (voir [figure ??](#)).

L'équilibre de la partie basse (partie droite avec l'orientation utilisée) montre qu'une section supporte le poids du morceau de barreau situé sous elle :

$$N(z) = \rho g S (h - z) \geq 0 \quad (\text{traction})$$

La contrainte dans la barre est alors

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{S} = \rho g (h - z)$$

2. La déformation n'est donc pas homogène :

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E} = \frac{\rho g}{E} (h - z)$$

3. Dans le cas des déformations inhomogènes la relation entre déformation et déplacement des points du barreau est :

$$\varepsilon(z) = \frac{du(z)}{dz}$$

4. Après intégration de l'expression précédente, on obtient la forme générale du déplacement :

$$u(z) = \frac{\rho g}{E} \left(hz - \frac{z^2}{2} \right) + C$$

où la constante est déterminée en utilisant la condition d'encastrement (déplacement nul) sur la section supérieure :

$$u(z = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Le déplacement en tout point de la barre s'exprime donc :

$$u(z) = \frac{\rho g}{E} \left(hz - \frac{z^2}{2} \right)$$

5. L'allongement de la barre est l'écart en déplacement entre les deux extrémités de la barre :

$$\Delta h = u(h) - u(0)$$

qui peut donc être calculé :

$$\Delta h = \frac{\rho g}{E} \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) = \frac{\rho g}{E} \frac{h^2}{2}$$

2.5 Treillis isostatique à 2 barres

1. Dans ce cas particulier, il n'est pas possible de déterminer les réactions aux appuis en écrivant l'équilibre global du treillis (3 équations pour deux inconnues). Le treillis est pourtant isostatique.
2. L'équilibre des noeuds donne les six équations suivantes :

$$A : \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + X_A = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + Y_A = 0 \end{cases} \quad B : \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - P = 0 \end{cases} \quad C : \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + X_C = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + Y_C = 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} N_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}P & \text{(compression)} \\ N_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}P & \text{(compression)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X_A = \frac{1}{2}P \\ Y_A = \frac{1}{2}P \\ X_C = -\frac{1}{2}P \\ Y_C = \frac{1}{2}P \end{cases}$$

3. Les allongement des barres sont :

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 S_1} = -\frac{PL}{\sqrt{2}ES_1} \quad ; \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{E_2 S_2} = -\frac{PL}{\sqrt{2}ES_2}$$

4. Les conditions aux limites donnent :

$$u_1 = v_A = 0 \quad ; \quad u_C = v_C = 0$$

les relations allongement-déplacement donnent donc :

$$\begin{cases} \Delta L_1 = (u_B \vec{x} + v_B \vec{y}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{y} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (u_B + v_B) \\ \Delta L_2 = (u_B \vec{x} + v_B \vec{y}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{y} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-u_B + v_B) \end{cases}$$

ce qui conduit au résultat :

$$\begin{cases} u_B = \frac{\sqrt{2}}{2} (\Delta L_1 - \Delta L_2) = -\frac{PL}{2E} \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) \\ v_B = \frac{\sqrt{2}}{2} (\Delta L_1 + \Delta L_2) = -\frac{PL}{2E} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \end{cases}$$

On a alors les trois cas :

- Si $S_1 = S_2$, le treillis à un comportement symétrique et le noeud B à un déplacement latéral nul.
- Si $S_1 \leq S_2$, le noeud B se déplace vers la gauche.
- Si $S_1 \geq S_2$, le noeud B se déplace vers la droite.

2.6 Treillis isostatique à 3 barres

1. L'équilibre du treillis donne :

$$\begin{cases} X_B + F = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ LF - 2LY_A = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Y_A = \frac{1}{2}F \\ X_B = -F \\ Y_B = -\frac{1}{2}F \end{cases}$$

2. L'équilibre des noeuds donne les six équations suivantes :

$$A : \begin{cases} N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + Y_A = 0 \end{cases} \quad B : \begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 + X_B = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}N_3 + Y_B = 0 \end{cases} \quad C : \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 + F = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} N_1 = -\frac{1}{2}F & \text{(compression)} \\ N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}F & \text{(traction)} \\ N_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F & \text{(compression)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_A = \frac{1}{2}F \\ X_B = -F \\ Y_B = -\frac{1}{2}F \end{cases}$$

3. Les barres les plus chargées sont les barres 2 et 3 dans lesquelles :

$$|\sigma_2| = |\sigma_3| = \frac{F}{\sqrt{2}S} \leq \sigma_e \Rightarrow F_{max} = \sqrt{2}S\sigma_e$$

4. Les allongement des barres sont :

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 2L}{E_1 S_1} = -\frac{FL}{ES} \quad ; \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 \sqrt{2}L}{E_2 S_2} = +\frac{FL}{ES} \quad ; \quad \Delta L_3 = \frac{N_3 \sqrt{2}L}{E_3 S_3} = -\frac{FL}{ES}$$

5. La relation liant déplacement des noeuds et allongement des barres est :

$$\Delta L_{AB} = (\vec{u}_B - \vec{u}_A) \cdot \vec{n}_{AB} \quad \text{avec} \quad \vec{n}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

6. Déplacement des noeuds :

(a) Les conditions aux limites donnent :

$$v_A = 0 \quad ; \quad u_B = 0 \quad ; \quad v_B = 0$$

(b) les relations allongement-déplacement donnent :

$$\begin{cases} \Delta L_1 = (-u_A \vec{x}) \cdot \vec{x} & = -u_A \\ \Delta L_2 = (u_C \vec{x} + v_C \vec{y} - u_A \vec{x}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{y} \right) & = \frac{\sqrt{2}}{2} (u_C - u_A - v_C) \\ \Delta L_3 = (u_C \vec{x} + v_C \vec{y}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{y} \right) & = \frac{\sqrt{2}}{2} (-u_C - v_C) \end{cases}$$

(c) ce qui conduit au résultat :

$$\begin{cases} u_A = -\Delta L_1 & = \frac{FL}{ES} \\ u_C = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\Delta L_2 - \Delta L_1 - \sqrt{2}\Delta L_3) & = \left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \right) \frac{FL}{ES} \\ v_C = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}\Delta L_2 - \Delta L_1 + \sqrt{2}\Delta L_3) & = -\frac{FL}{2ES} \end{cases}$$

2.7 Treillis isostatique à 5 barres

1. L'équilibre des noeuds donne les équations suivantes :

$$A : \begin{cases} N_2 + X_A = 0 \\ N_1 + Y_A = 0 \end{cases} \quad B : \begin{cases} -N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \\ N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} -N_4 = 0 \\ -N_3 - F = 0 \end{cases} \quad D : \begin{cases} N_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 + X_D = 0 \\ -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne pour les tensions dans les barres :

$$\begin{cases} N_1 = -F & \text{(compression)} \\ N_2 = -F & \text{(compression)} \\ N_3 = -F & \text{(compression)} \\ N_4 = 0 & \text{(barre inactive)} \\ N_5 = \sqrt{2}F & \text{(traction)} \end{cases}$$

et pour les réactions aux appuis :

$$\begin{cases} X_A = F \\ Y_A = F \\ X_D = -F \end{cases}$$

2. La barres la plus chargée est la barre 5 dans laquelle :

$$|\sigma_5| = \frac{\sqrt{2}F}{S} \leq \sigma_e \Rightarrow F_{max} = \frac{S\sigma_e}{\sqrt{2}}$$

3. Les allongement des barres sont :

$$\begin{cases} \Delta L_1 = \frac{N_1 L}{ES} = -\frac{FL}{ES} \\ \Delta L_2 = \frac{N_2 L}{ES} = -\frac{FL}{ES} \\ \Delta L_3 = \frac{N_3 L}{ES} = -\frac{FL}{ES} \\ \Delta L_4 = \frac{N_4 L}{ES} = 0 \\ \Delta L_5 = \frac{N_5 \sqrt{2}L}{ES} = \frac{2FL}{ES} \end{cases}$$

4. La relation liant déplacement des noeuds et allongement des barres est :

$$\Delta L_{AB} = (\vec{u}_B - \vec{u}_A) \cdot \vec{n}_{AB} \quad \text{avec} \quad \vec{n}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

5. Déplacement des noeuds :

(a) Les conditions aux limites donnent :

$$u_A = 0 \quad ; \quad v_A = 0 \quad ; \quad u_D = 0$$

(b) les relations allongement-déplacement donnent :

$$\begin{cases} \Delta L_1 = (v_D \vec{y}) \cdot \vec{y} & = v_D \\ \Delta L_2 = (u_B \vec{x} + v_B \vec{y}) \cdot \vec{x} & = u_B \\ \Delta L_3 = (u_C \vec{x} + v_C \vec{y} - u_B \vec{x} - v_B \vec{y}) \cdot \vec{y} & = v_C - v_B \\ \Delta L_4 = (u_C \vec{x} + v_C \vec{y} - v_D \vec{y}) \cdot \vec{x} & = u_C \\ \Delta L_5 = (u_B \vec{x} + v_B \vec{y} - v_D \vec{y}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{y} \right) & = \frac{\sqrt{2}}{2} (u_B - v_B + v_D) \end{cases}$$

(c) ce qui conduit au résultat :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_D = \Delta L_1 \\ u_B = \Delta L_2 \\ v_B = -\sqrt{2}\Delta L_5 + \Delta L_1 + \Delta L_2 \\ u_C = \Delta L_4 \\ v_C = \Delta L_3 + v_B \end{array} \right. \begin{array}{l} = -\frac{FL}{ES} \\ = -\frac{FL}{ES} \\ = -2(\sqrt{2} + 1)\frac{FL}{ES} \\ = 0 \\ = -(2\sqrt{2} + 3)\frac{FL}{ES} \end{array}$$