

Déformation des poutres rectilignes

Traction-Compression

Application aux treillis plans

Laurent CHAMPANEY

Notes du cours d'Introduction à la mécanique

Ce document rassemble des notes du cours de mécanique de première année de licence (DEUG1) de l'Université de Versailles sur la déformation des barres et l'application aux treillis articulés plans.

Sommaire

1	Expérience de traction	2	
1.1	Réalisation pratique	2	
1.2	Isotropie/Anisotropie	3	
1.3	Caractéristiques du matériau	3	
2	Notion d'efforts intérieurs	4	
2.1	Milieux continus	4	
2.2	Efforts intérieurs	4	
2.3	Efforts intérieurs dans les poutres	4	
3	Comportement en traction compression	6	
3.1	Efforts intérieurs	6	
3.2	Paramètres matériau	6	
	3.3 Effet transverse	7	
	3.4 Variation de volume	7	
4	Cas des déformations inhomogènes	8	
4.1	Déplacement	8	
4.2	Relation entre déformation et déplacement	8	
4.3	Exemple	8	
5	Treillis	10	
5.1	Définition	10	
5.2	Equilibre d'un treillis	11	
5.3	Déformation des barres	13	
5.4	Déplacement des noeuds	14	
5.5	Critère de résistance	14	
5.6	Exemple complet	14	

1 Expérience de traction

1.1 Réalisation pratique

On réalise l'expérience de traction schématisée sur la figure 1. Dans cette expérience on s'intéresse aux déformations longitudinales d'un barreau de longueur L et de section S .

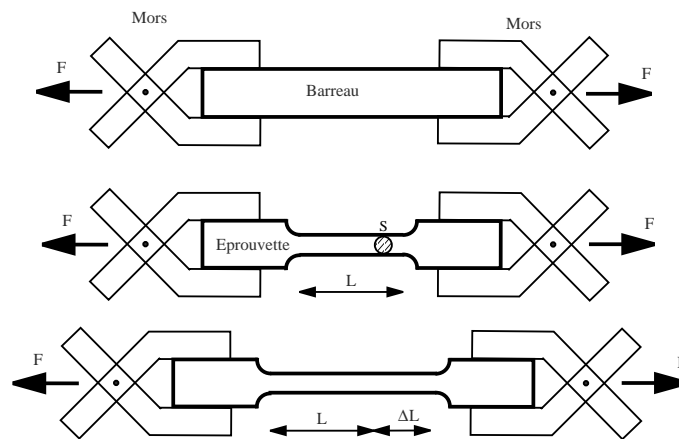


FIG. 1 – Epreuve de Traction

Lors de cet essai, on impose un effort F et on enregistre les variations de l'allongement ΔL de l'éprouvette. On obtient généralement une courbe du type de celle présentée sur la figure 2.

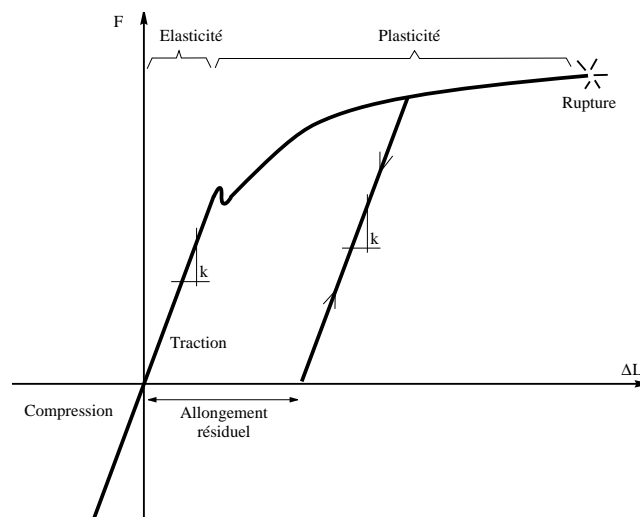


FIG. 2 – Courbe de traction

Dans la suite on s'intéresse uniquement à la partie de la courbe qui correspond à un comportement élastique du matériau. Sur cette partie, on constate une variation linéaire de ΔL en fonction de F qu'on représente par :

$$F = k\Delta L$$

k est la raideur apparente de l'éprouvette.

1.2 Isotropie/Anisotropie

Lorsqu'on réalise des expériences de traction sur des éprouvettes de mêmes tailles découpées selon des directions différentes d'un même matériau (figure 3), on peut obtenir des raideurs k_x et k_y différentes.

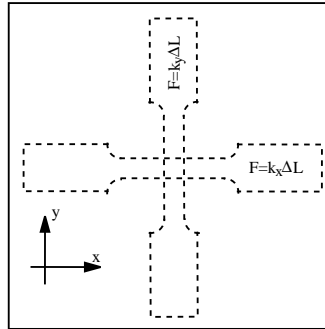


FIG. 3 – Traction dans deux directions

- Si $k_x = k_y$, quelles que soient les directions x et y , alors le matériau est dit *isotrope*. C'est le cas de la plupart des matériaux métalliques et plastiques.
- Si $k_x \neq k_y$, alors le matériau est dit *anisotrope*. C'est le cas du bois, du béton, des matériaux composites, ...

1.3 Caractéristiques du matériau

On constate expérimentalement que :

- si L est plus grand pour un même F , alors ΔL est plus grand.
- si S est plus grande pour un même F , alors ΔL est moins grand.

On en déduit donc que la raideur k n'est pas une quantité intrinsèque qui représente le comportement mécanique du matériau. k dépend aussi des paramètres géométriques de l'éprouvette (L et S). Dans la suite nous chercherons à représenter le comportement mécanique du matériau à l'aide de paramètres intrinsèques.

2 Notion d'efforts intérieurs

2.1 Milieu continu

Soit un solide S (figure 4) soumis à un chargement extérieur quelconque (forces à distance ou de contact).

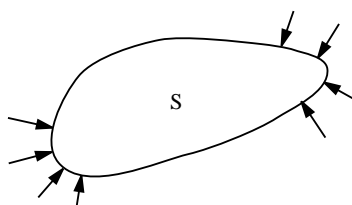


FIG. 4 – Milieu continu soumis à un chargement

S est un *milieu continu* s'il se déforme sans qu'aucun trou (ou fissure) n'apparaisse à l'intérieur de la matière.

2.2 Efforts intérieurs

Si on réalise une *coupure* fictive du solide S par un plan, il existe forcément des efforts appliqués sur la zone coupée pour que chacun des deux morceaux S_1 et S_2 restent en équilibre (figure 5).

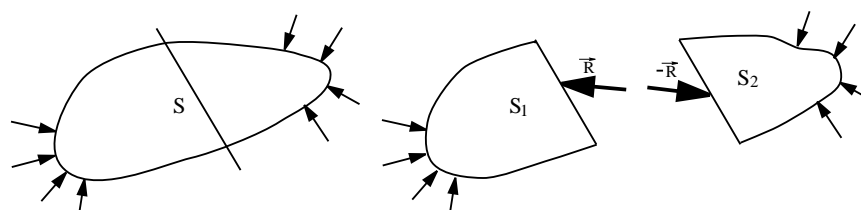


FIG. 5 – Coupure

Il existe donc des efforts à l'intérieur à la matière de S_1 sur S_2 (et de S_2 sur S_1) de manière à ce que chacun des deux morceaux soit en équilibre. Ce sont les *efforts intérieurs* : ils assurent la *cohésion* du matériau (il permettent que le milieu reste continu).

2.3 Efforts intérieurs dans les poutres

2.3.1 Poutre

Une poutre est un solide dont une dimension est beaucoup plus grande que les deux autres. Une poutre est représenté par sa ligne moyenne. Chaque point de la ligne moyenne représente une section assimilée à un point.

Lorsque la ligne moyenne est une droite, la poutre est dite *rectiligne* ou *droite*.

2.3.2 Efforts intérieurs

On considère une poutre droite (pour simplifier) soumise à des efforts à ces deux extrémités et en équilibre (fig 6). Si la poutre est en équilibre et et qu'on réalise une coupure alors chacune des

deux parties est en équilibre sous l'action des forces intérieures. Les deux parties sont nommée *droite* et *gauche*, relativement à l'orientation \vec{n} de la poutre.

Il apparaît clairement que, la section coupée étant réduite à un point, les efforts intérieurs peuvent être représentés par un effort et un moment. Par choix, ces actions mécaniques sont définies comme étant l'action de la partie droite sur la partie gauche.

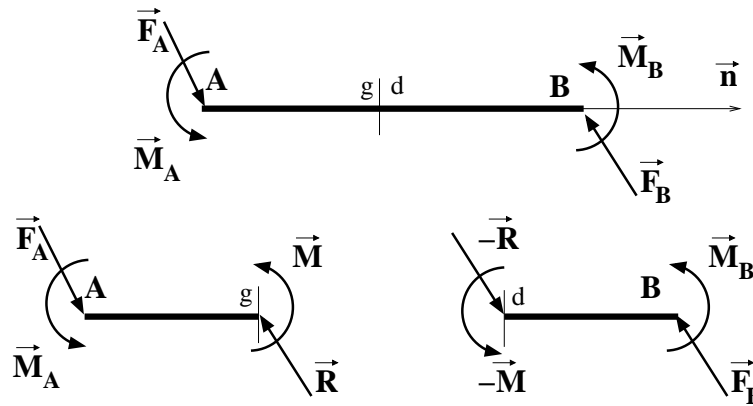


FIG. 6 – Efforts intérieurs dans une poutre

Ces efforts peuvent être décomposés de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vec{R} = N\vec{n} + \vec{T}_t \\ \vec{M} = M_t\vec{n} + \vec{M}_f \end{cases}$$

La signification des composantes de l'effort et du moment est :

- N est l'*effort normal*, lorsqu'il est non nul, la poutre est sollicitée en *Traction-Compression*
- \vec{T}_t est l'*effort tranchant*, lorsqu'il est non nul, la poutre est sollicitée en *Cisaillement*
- M_t est le *moment de torsion*, lorsqu'il est non nul, la poutre est sollicitée en *Torsion*
- \vec{M}_f est le *moment fléchissant*, lorsqu'il est non nul, la poutre est sollicitée en *Flexion*

2.3.3 Barre

Une poutre droite sollicitée uniquement en traction ou en compression est appelée *barre*.

3 Comportement en traction compression

3.1 Efforts intérieurs

Calculons les efforts intérieurs dans le cas d'un barreau en traction orienté par le vecteur unitaire \vec{x} .

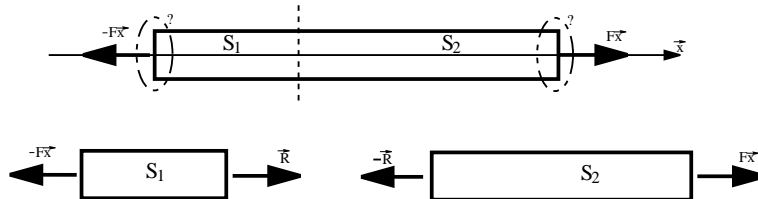


FIG. 7 – Efforts intérieurs en traction

Par choix, on appelle effort intérieur \vec{R} l'action de la partie droite sur la partie gauche (par rapport à l'orientation \vec{x}). \vec{R} peut être calculé en écrivant l'équilibre de S_1 (partie gauche) :

$$\vec{R} + (-F\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow N\vec{x} = F\vec{x} \Rightarrow N = F$$

ou en écrivant l'équilibre de S_2 (partie droite) :

$$(-\vec{R}) + F\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow N\vec{x} = F\vec{x} \Rightarrow N = F$$

L'effort normal N est donc égal à l'effort appliqué F . Par convention :

- si $N > 0$: le barreau est en *traction*,
- si $N < 0$: le barreau est en *compression*.

3.2 Paramètres matériau

Nous allons maintenant chercher une relation entre l'effort intérieur $R = F$ et la déformation du milieu.

3.2.1 Notion de Contrainte

ΔL n'est pas une quantité représentative de la déformation : si L est *deux* fois plus grand alors ΔL est deux *deux* fois plus grand. On utilise alors :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

ε (*epsilon*) est la *déformation* et est un rapport de longueurs. C'est donc un nombre sans dimension.

3.2.2 Notion de déformation

F n'est pas une quantité représentative des efforts nécessaires pour créer la déformation : si N est *deux* fois plus grand et S *deux* fois plus grand alors ΔL reste inchangé. On utilise alors :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ (*sigma*) est la *contrainte* dans le matériau. C'est un effort par unité de surface, homogène à une pression.

L'unité de σ est le N/mm^2 ou le *bar*. En pratique on utilise plutôt le *MPa* (MegaPascal), $1MPa = 1N/mm^2$.

3.2.3 Relation de comportement

On appelle relation de comportement élastique, la relation linéaire qui lie la contrainte σ à la déformation ε :

$$F = k\Delta L \Rightarrow S\sigma = kL\varepsilon \Rightarrow \sigma = \frac{kL}{S}\varepsilon$$

La quantité $\frac{kL}{S}$ est un paramètre intrinsèque du matériau appelé *Module d'Young* et noté E . Le comportement élastique en traction ou en compression est donc :

$$\sigma = E\varepsilon$$

Le module d'Young E à la même dimension que σ le MPa . Par exemple, pour l'acier $E \simeq 200000MPa$.

3.3 Effet transverse

Expérimentalement on constate un rétrécissement du diamètre lorsque le barreau s'allonge. On note alors :

$$\frac{\Delta D}{D} = -\nu \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \frac{\Delta D}{D} = -\nu\varepsilon \Rightarrow \frac{\Delta D}{D} = -\nu \frac{F}{ES}$$

Le *coefficient de Poisson* ν (nu) est un nombre sans dimension. Par exemple, pour les métaux $\nu = 0.3$.

La quantité $\frac{\Delta D}{D}$ est appelé *déformation transverse*

3.4 Variation de volume

Du fait de l'allongement et de la variation du diamètre, il peut y avoir une variation du volume du barreau. Pour une barre de longueur L et de section cylindrique (diamètre D), le nouveau volume est :

$$V + \Delta V = (L + \Delta L) \frac{\pi}{4} (D + \Delta D)^2 = (L + \Delta L) \frac{\pi}{4} (D^2 + \Delta D^2 + 2D\Delta D)$$

On choisit de négliger les termes d'ordre inférieur compte tenu de la petitesse des termes de variation :

$$V + \Delta V \simeq (L + \Delta L) \frac{\pi}{4} (D^2 + 2D\Delta D)$$

En développant à nouveau, on obtient :

$$V + \Delta V \simeq \frac{\pi}{4} LD^2 + \frac{\pi}{4} (D^2\Delta L + 2DL\Delta D + 2D\Delta D\Delta L)$$

Le dernier terme est négligé et le premier correspond au volume initial. On a donc pour la variation de volume :

$$\Delta V \simeq \frac{\pi}{4} (D^2\Delta L + 2DL\Delta D)$$

Compte tenu de l'expression de la variation de diamètre en fonction de la variation de longueur :

$$\Delta D = -\nu D \frac{\Delta L}{L}$$

on obtient :

$$\Delta V \simeq \frac{\pi}{4} (D^2\Delta L - 2\nu D^2\Delta L) = \frac{\pi}{4} D^2\Delta L (1 - 2\nu)$$

Pour la plupart des matériaux, $\nu < 0.5$ et donc le volume augmente quand le barreau s'allonge.

Le cas où $\nu = 0.5$ correspond à un matériau *incompressible* qui ne présente pas de variation de volume ($\Delta V = 0$). Les élastomères sont des matériaux presque incompressibles.

4 Cas des déformations inhomogènes

Lorsque la contrainte n'est pas constante dans la barre, on parle de *déformations inhomogènes*.

4.1 Déplacement

Si la contrainte et donc la déformation ne sont pas constantes (dépendent de la position sur barre), l'allongement de la poutre ne peut plus être calculé comme dans la partie précédente.

Dans ce cas, la déformation est exprimée comme agissant sur le déplacement des points. Le *déplacement* d'un point est un vecteur qui représente l'écart en position pour un point entre la structure non déformée et la structure déformée (voir figure 8).

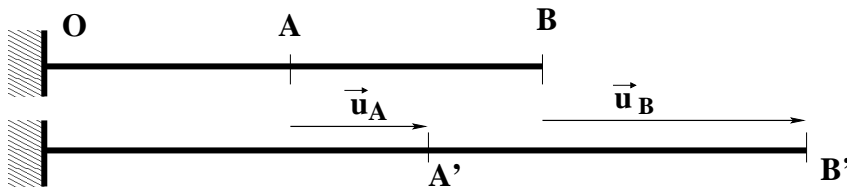


FIG. 8 – Déplacement des points

Dans le cas de la traction-compression, le déplacement des points se produit dans la direction de la barre :

$$\vec{u}_A = u_A \vec{n} \quad ; \quad \vec{u}_B = u_B \vec{n} \quad ; \quad \vec{u} = u \vec{n}$$

4.2 Relation entre déformation et déplacement

Il est clair que, lorsque le domaine se déforme, les points ne pas tous le même déplacement. La relation générale entre la déformation et la variation de déplacement des points est la suivante :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

4.3 Exemple

On considère la cas d'une barre suspendue soumise seulement à son poids propre (voir figure 9). La surface de sa section est S et h est la hauteur totale de cette barre. Le module d'Young du matériau est noté E et ρ est sa masse volumique.

Il est facile de constater qu'une section située à une altitude z supporte le poids du morceau de barre situé sous elle :

$$N(z) = \rho g S (h - z) \geq 0 \quad (\text{traction})$$

La contrainte n'est alors pas constante dans la barre :

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{S} = \rho g (h - z)$$

et la déformation non plus :

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E} = \frac{\rho g}{E} (h - z)$$

z étant l'abscisse sur la barre, la déformation inhomogène est liée au déplacement par la relation :

$$\varepsilon(z) = \frac{du(z)}{dz}$$

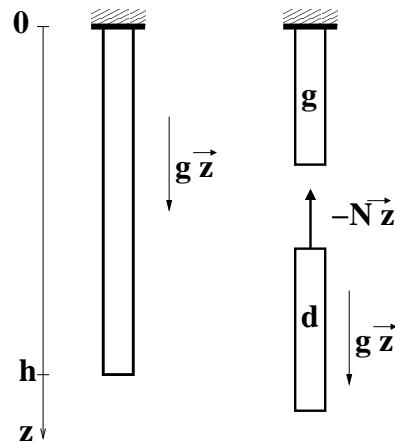


FIG. 9 – Barre soumise à son propre poids

Après intégration, on obtient la forme générale du déplacement :

$$u(z) = \frac{\rho g}{E} \left(hz - \frac{z^2}{2} \right) + C$$

où C est une constante à déterminer en utilisant les éventuelles conditions de liaison aux extrémités de la barre. Ici, l'extrémité supérieure de la barre est encastree. Le déplacement y est donc nul :

$$u(z = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Le déplacement en tout point de la barre s'exprime donc :

$$u(z) = \frac{\rho g}{E} \left(hz - \frac{z^2}{2} \right)$$

L'allongement de la barre est l'écart en déplacement entre les deux extrémités de la barre :

$$\Delta h = u(h) - u(0)$$

qui peut donc être calculé, ici :

$$\Delta h = \frac{\rho g}{E} \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) = \frac{\rho g}{E} \frac{h^2}{2}$$

5 Treillis

5.1 Définition

On appelle treillis un assemblage de barres articulées entre elles de manière à ce que chacune des barres ne soit sollicitée qu'en traction-compression. Les figures 10 et 11 présentent des exemples de réalisation de treillis.

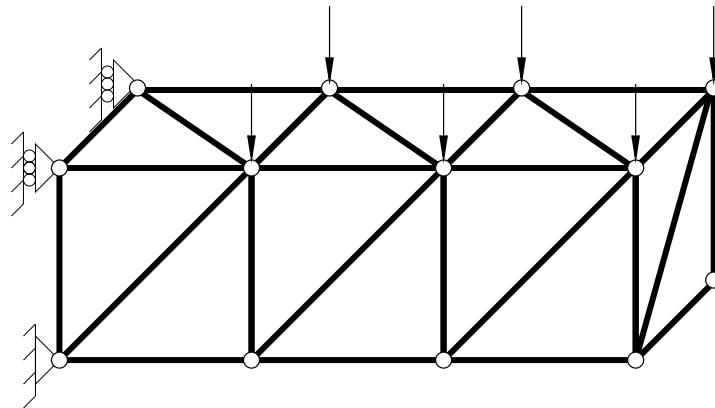


FIG. 10 – Exemple de treillis (toutes les barres ne sont pas représentées)

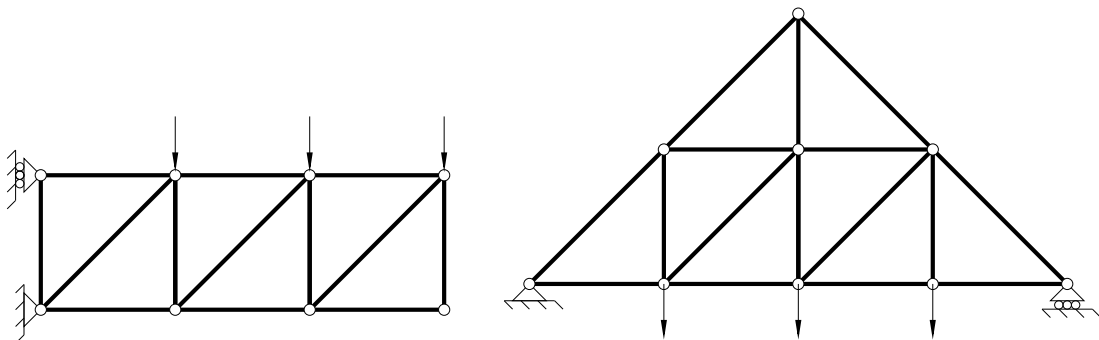


FIG. 11 – Exemples de treillis plans

On appelle *noeud* une articulation entre plusieurs barres. La figure 12 présente le détail de la réalisation pratique d'un noeud de treillis.

Pour assurer que chacune des barres ne soit sollicitée qu'en traction ou en compression il faut que :

- le poids des barres soit négligeable devant les autres sollicitations,
- les sollicitations extérieures ne soient que des efforts appliqués sur les noeuds,
- les liaisons avec l'extérieur soit des appuis fixes ou des appuis mobiles.

Lorsque toute la géométrie est dans un même plan (au décalage près entre les barres due à la réalisation pratique des noeuds) et que les efforts appliqués sont dans ce plan, le treillis est dit *plan*.

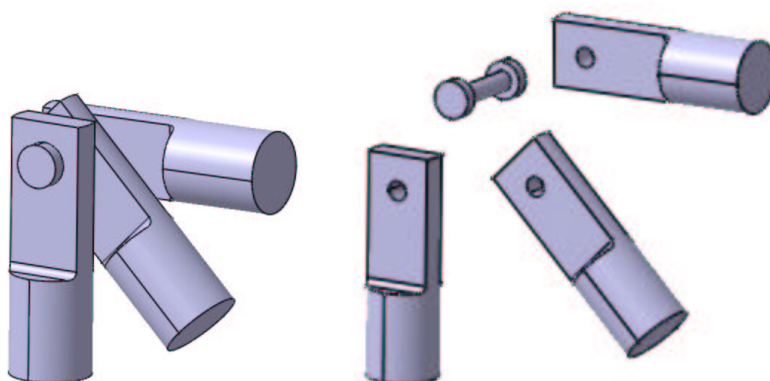


FIG. 12 – Détails d'un noeud

5.2 Equilibre d'un treillis

5.2.1 Equilibre global du treillis

Dans certaines situations, on peut calculer les réactions aux appuis en écrivant l'équilibre global du treillis.

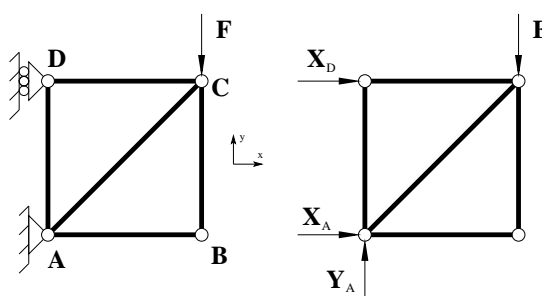


FIG. 13 – Equilibre global du treillis

Par exemple, pour le treillis de la figure 13, l'équilibre des efforts donne :

$$\vec{F} + \vec{R}_A + \vec{R}_D = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} X_A + X_D = 0 \\ Y_A - F = 0 \end{cases}$$

et l'équilibre des moments :

$$\vec{AC} \wedge \vec{F} + \vec{AA} \wedge \vec{R}_A + \vec{AD} \wedge \vec{R}_D = \vec{0} \Rightarrow LX_D + LF = 0$$

ce qui permet bien de calculer les réactions X_A , Y_A et X_D .

5.2.2 Equilibre d'une barre

L'écriture de l'équilibre d'une barre n'apporte aucune information supplémentaire. En effet, la barre n'étant sollicitée que par deux forces à ses extrémités, on sait déjà que ces efforts peuvent être exprimés à partir de la tension T dans la barre. Cette tension est l'effort normal N , comme le montre la figure 14.

5.2.3 Equilibre des noeuds

La complexité d'un treillis ne provient pas de la complexité de ses éléments (les barres) mais plutôt de la complexité de l'arrangement des barres entre elles. C'est pourquoi, pour étudier

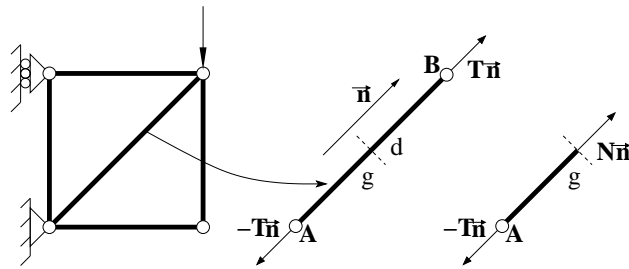


FIG. 14 – Equilibre d'une barre

l'équilibre d'un treillis, on réalise l'équilibre de chacun de ses noeuds. Comme le montre la figure 15, cet équilibre fait intervenir les efforts normaux de chacune des barres connectées au noeud isolé.

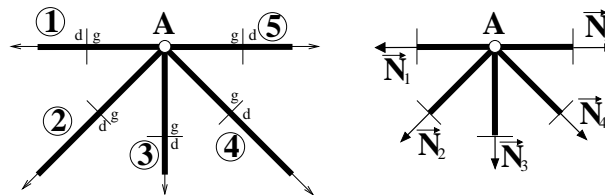


FIG. 15 – Equilibre d'un noeud

L'équilibre du noeud A de la figure 15 donne directement :

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{N}_4 + \vec{N}_5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 + N_5 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 = 0 \end{cases}$$

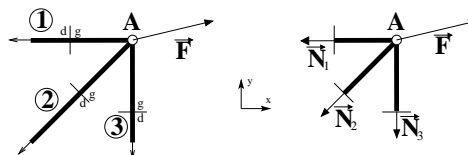


FIG. 16 – Equilibre d'un noeud soumis à un effort

Si le noeud est soumis à un effort extérieur donné (fig 16), l'équilibre fait intervenir les composantes de cet effort.

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + F_x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - N_3 + F_y = 0 \end{cases}$$

Si le noeud est en appui fixe (fig 17), les deux inconnues de liaison interviennent dans les équations d'équilibre. Ces équations sont celles qui permettront de calculer les réactions aux

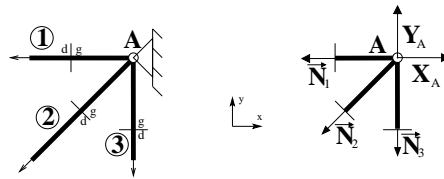


FIG. 17 – Equilibre d'un noeud en appui fixe

appuis si celles-ci n'ont pas été obtenues par l'équilibre global du treillis :

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{R}_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + X_A = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - N_3 + Y_A = 0 \end{cases}$$

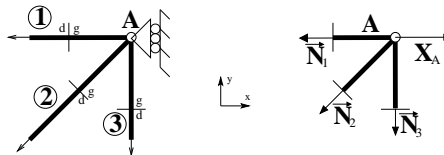


FIG. 18 – Equilibre d'un noeud en appui mobile

Si le noeud est en appui mobile (fig 18), l'inconnue de liaison intervient dans l'équation d'équilibre dont la direction correspond au blocage. Cette équation est celle qui permettra de calculer cette réaction si elle n'a pas été obtenue par l'équilibre global du treillis :

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{R}_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + X_A = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - N_3 = 0 \end{cases}$$

5.2.4 Isostaticité

Considérons un treillis constitué de n noeuds et de m barres. Il y a m inconnues d'efforts intérieurs ($N_i, i = 1 \dots m$). Par ailleurs, supposons qu'il y ai p inconnues de liaison (X_A, Y_A, \dots). L'équilibre des n noeuds conduit à $2n$ équations.

Trois situations peuvent alors se produire :

- $m + p = 2n$: le treillis est *isostatique*, c'est-à-dire que les efforts intérieurs peuvent être calculés et ne dépendent pas du comportement des barres. C'est par exemple le cas du treillis de la figure 13 pour lequel $n = 4, m = 5$ et $p = 3$.
- $m + p < 2n$: le treillis possède des mobilités internes : il ne peut être en équilibre. C'est par exemple le cas du treillis de la figure 19 pour lequel $n = 4, m = 4$ et $p = 3$.
- $m + p > 2n$: le treillis est *hyperstatique* c'est à dire que les efforts intérieurs ne pourront être calculés qu'après prise en compte de la déformation des barres.

5.3 Déformation des barres

Compte tenue du mode de sollicitation des barres, la contrainte est homogène (constante) dans chaque barre. Si la barre i à un comportement élastique, caractérisé par le module d'Young

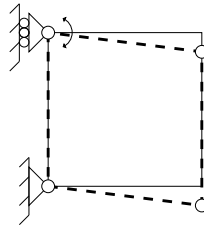


FIG. 19 – Treillis avec mobilité interne

E_i , une section S_i et une longueur initiale L_i alors son allongement s'écrit :

$$\Delta L_i = \frac{N_i L_i}{E_i S_i}$$

5.4 Déplacement des noeuds

Lorsque l'allongement d'une barre est connu, il permet le calcul du déplacement des noeuds par la relation :

$$\Delta L_{AB} = (\vec{u}_B - \vec{u}_A) \cdot \vec{n}_{AB} \quad \text{avec} \quad \vec{n}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

qui exprime que l'allongement d'une barre est lié aux déplacements de ses extrémités notés \vec{u}_A et \vec{u}_B (fig 20).

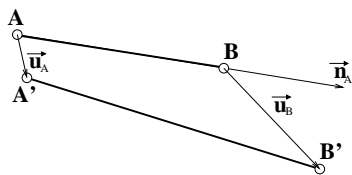


FIG. 20 – Allongement d'une barre

Les déplacements sont notés :

$$\vec{u}_A = u_A \vec{x} + v_A \vec{y}$$

5.5 Critère de résistance

La connaissance des efforts intérieurs permet de déterminer la barre la plus chargée au sens de la contrainte :

$$\sigma_i = \frac{N_i}{S_i}$$

Si on appelle σ_{max} la contrainte maximale dans le treillis, le critère de résistance du treillis vis-à-vis de la plasticité sera :

$$\sigma_{max} \leq \sigma_e$$

où σ_e est la limite élastique du matériau employé.

5.6 Exemple complet

On considère le treillis de la figure 21. Toutes les barres ont la même section S et sont constituées du même matériau de module d'Young E et de limite élastique σ_e .

L'équilibre des noeuds donne :

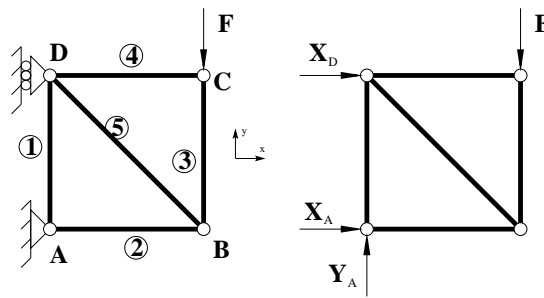


FIG. 21 – Equilibre global du treillis

$$\begin{cases}
 \text{– noeud A :} & \begin{cases} N_2 + X_A = 0 \\ N_1 + Y_A = 0 \end{cases} \\
 \text{– noeud B :} & \begin{cases} -N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \\ N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \end{cases} \\
 \text{– noeud C :} & \begin{cases} -N_4 = 0 \\ -N_3 - F = 0 \end{cases} \\
 \text{– noeud D :} & \begin{cases} N_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 + X_D = 0 \\ -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \end{cases}
 \end{cases}$$

Ce qui donne pour les tensions dans les barres :

$$\begin{cases}
 N_1 = -F & \text{(compression)} \\
 N_2 = -F & \text{(compression)} \\
 N_3 = -F & \text{(compression)} \\
 N_4 = 0 & \text{(barre inactive)} \\
 N_5 = \sqrt{2}F & \text{(traction)}
 \end{cases}$$

et pour les réactions aux appuis :

$$\begin{cases}
 X_A = F \\
 Y_A = F \\
 X_D = -F
 \end{cases}$$

Toutes les barres ont la même section S , la barre la plus chargée est la numéro 5 dans laquelle :

$$\sigma_5 = \frac{N_5}{S} = \frac{\sqrt{2}F}{S} \leq \sigma_e$$

L'effort maximal que peut supporter le treillis est donc :

$$F_{max} = \frac{\sigma_e S}{\sqrt{2}}$$

Les allongements sont connus dès lors que les tensions sont connues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L_1 = \frac{N_1 L}{ES} = -\frac{FL}{ES} \\ \Delta L_2 = \frac{N_2 L}{ES} = -\frac{FL}{ES} \\ \Delta L_3 = \frac{N_3 L}{ES} = -\frac{FL}{ES} \\ \Delta L_4 = \frac{N_3 L}{ES} = 0 \\ \Delta L_5 = \frac{N_3 \sqrt{2} L}{ES} = \frac{2FL}{ES} \end{array} \right.$$

Les conditions d'appuis imposent :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ u_D = 0 \end{array} \right.$$

Les relations entre déplacements des noeuds et allongements des barres donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L_1 = (v_D \vec{y}) \cdot \vec{y} = v_D \\ \Delta L_2 = (u_B \vec{x} + v_B \vec{y}) \cdot \vec{x} = u_B \\ \Delta L_3 = (u_C \vec{x} + v_C \vec{y} - u_B \vec{x} - v_B \vec{y}) \cdot \vec{y} = v_C - v_B \\ \Delta L_4 = (u_C \vec{x} + v_C \vec{y} - v_D \vec{y}) \cdot \vec{x} = u_C \\ \Delta L_5 = (u_B \vec{x} + v_B \vec{y} - v_D \vec{y}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{y} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (u_B - v_B + v_D) \end{array} \right.$$

ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_D = \Delta L_1 = -\frac{FL}{ES} \\ u_B = \Delta L_2 = -\frac{FL}{ES} \\ v_B = -\sqrt{2} \Delta L_5 + \Delta L_1 + \Delta L_2 = -2(\sqrt{2} + 1) \frac{FL}{ES} \\ u_C = \Delta L_4 = 0 \\ v_C = \Delta L_3 + v_B = -(2\sqrt{2} + 3) \frac{FL}{ES} \end{array} \right.$$