Courbes paramétrées

M Spagnesi

Arts et Métiers

2022-2023

Objectifs

Compétences

- Savoir étudier un point singulier d'une courbe paramétrée.
- Savoir étudier les branches infinies d'une courbe paramétrée.
- Savoir réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée.
- Savoir étudier et tracer une courbe paramétrée.

Notion de fonction vectorielle

Définition

I intervalle de $\mathbb{R}$,

$$f : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto f(t) = (x(t); y(t)) \end{cases}$$

- f : arc paramétré/courbe paramétré.
- $\Gamma = \{f(t); t \in I\}$: support/image de l'arc paramétré

En cinématique,

- $f'(t)$: *vitesse.*
- $f''(t)$: *accélération.*

Exemples de courbes paramétrées

- La droite $\mathcal{D}$ passant par $A\left(x_A ; y_A\right)$, de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- Le cercle de centre O, de rayon 1.
- Le cercle de centre $\Omega\left(\alpha ; \beta\right)$ et de rayon R.

Définition

Limite d'une fonction vectorielle-définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto f(t) = (x(t); y(t)) \end{cases}$

$\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = l = (a; b)$ si $\lim\limits_{t \to t_0} \|f(t) - l\| = 0$

ie $\lim\limits_{t \to t_0} (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 = 0$

Théorème

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = l = (a; b) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = b \end{cases}$$

Définition

Dérivée d'une fonction vectorielle-définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto f(t) = (x(t); y(t)) \end{cases}$

f est dérivable si x et y sont dérivables,
et dans ce cas

$$f'(t) = (x'(t); y'(t))$$

Notion d'arc simple

Définition

Soit $(I; f)$ un arc paramétré.

- M simple si : $\exists! t \in I$, tel que $M = f(t)$
- arc simple si : tous les points de son support sont simples.
- point d'ordre n si : il est atteint pour exactement n valeurs de t distinctes.

Proposition

L'arc $(I; f)$ est simple ssi f est injective

Application

Exercice n°1

Etudier les points doubles de

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t} \\ \\ y(t) = \dfrac{t}{1-t^2} \end{cases}$$

Point régulier/point stationnaire

Définition

Soient $(I; f)$ un arc paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ et $t_0 \in I$.

- $M(t_0)$ régulier si : $f'(t_0) \neq \vec{0}$
- arc régulier si : tous les points sont réguliers.
- $M(t_0)$ stationnaire/singulier si : $f'(t_0) = \vec{0}$
  point d'arrêt de la trajectoire

Exercice n°2

On considère l'arc paramétré défini sur $[0; 4\pi]$ par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) - 2\cos(t/2) \\ y(t) = \sin(t) - 2\sin(t/2) \end{cases}$$

L'arc est-il régulier ?

Définition

Définition

Soient $(I; f)$ un arc paramétré, $t_0 \in I$
$(I; f)$ admet une tangente au point $M(t_0)$ si $(M(t)M(t_0))$ admet une position limite quand $t \to t_0$.

Proposition

Soit $(I; f)$ un arc paramétré.

- Si f dérivable sur I, alors la tangente en $M(t_0)$, point régulier, est dirigée par $f'(t_0)$.
- Si f indéfiniment dérivable, alors la tangente en $M(t_0)$, point stationnaire, est dirigée par $f^{(p)}(t_0)$ (premier vecteur dérivée non nul-s'il existe)

Point méthode

Pour déterminer la tangente en un point :

1. Si le point est <u>régulier</u>,
   la tangente est dirigée par le vecteur vitesse.
2. Si le point $M(t_0)$ est <u>stationnaire</u>, il y a plusieurs moyens de déterminer la tangente :
   - On cherche le premier vecteur dérivé non nul $\vec{v} = f^{(p)}(t_0)$,
     alors la tangente est dirigée par $\vec{v}$.
   - On calcule $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$.
   - On calcule $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Eqution de la tangente et position relative

Equation de la tangente en un point régulier :

$$(x - x(t_0))\, y'(t_0) - (y - y(t_0))\, x'(t_0) = 0$$

traduit le fait que $\overrightarrow{M(t_0)\,M}$ *et* $f'(t_0)$ *sont colinéaires.*

Pour étudier la position relative de la courbe par rapport à sa tangente $\mathcal{T}$:

- Si $\mathcal{T}$ oblique ou horizontale, on étudie le signe de :
$$y(t) - y(t_0) - m(x(t) - x(t_0))$$
- Si $\mathcal{T}$ verticale, on étudie les variations de x au voisinage de t_0.

Entiers caractéristiques

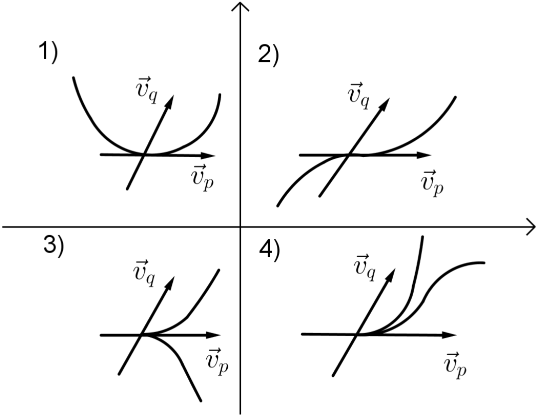
Définition

Soient $(I; f)$ un arc paramétré, $M(t_0)$ un point de cet arc.

- $f^{(p)}(t_0)$: premier vecteur dérivé non nul en t_0
- $f^{(q)}(t_0)$: premier vecteur dérivé non colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$

$(p; q)$: entiers caractéristiques de l'arc paramétré.

Allure de la courbe en fonction des entiers caractéristiques



Défintion

Définition

Soient $(I; f)$ un arc paramétré, t_0 une extrémité de I n'appartenant pas à I.

$(I; f)$ admet une branche infinie en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \|f(t)\| = +\infty$

Attention !

$$\lim_{t \to t_0} \|f(t)\| = +\infty \not\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty \text{ ou } \lim_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty$$

Notion d'asymptote

Définition

Une droite $\mathcal{D}$ est asymptote à l'arc $(I; f)$ en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} d\left(M(t); \mathcal{D}\right) = 0$

Proposition

L'arc $(I; f)$ admet $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ comme asymptote en t_0 ssi

$$\lim_{t \to t_0} ax(t) + by(t) + c = 0$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $ax(t) + by(t) + c$.

Point méthode

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, l'arc admet <u>une asymptote parallèle à (Ox)</u>.

  position donné par le signe de $y - y_0$ ie par les variations de y.

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$, l'arc admet <u>une asymptote parallèle à (Oy)</u>.

  position donné par les variations de x.

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$, voir poly de cours.

Application

Exercice n°3

1. Etudier la branche infinie en $t = 1$ de l'arc paramétré défini sur $]-1, 1[$ par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^4 - 1} \\ \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^4 - 1} \end{cases}$
2. Etudier la branche infinie en $+\infty$ de l'arc paramétré défini sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t^2 + t - 1 \end{cases}$
3. Etudier les branches infinies en 0 et en 1 de l'arc paramétré défini sur $]0; 1[$ par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t - 1} \\ \\ y(t) = t + \ln(t) \end{cases}$

Réduction de domaine de description totale

Soit Γ courbe paramétrée, donnée par $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$.

- Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, et $\phi(t) = t + A$ $(A > 0)$: On peut choisir un intervalle d'amplitude A.
- Si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et $\phi(t) = -t$: On peut réduire l'intervalle d'étude à $\mathcal{D} \cap [\,0, +\infty\,[$.
- Si $\mathcal{D} = [a, b]$ et $\phi(t) = a + b - t$: On peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$.
- Si $\mathcal{D} = \,]\,0, +\infty\,[$ et $\phi(t) = \dfrac{1}{t}$, on peut réduire l'intervalle d'étude à $]\,0, 1\,]$.

Obtention de la courbe en totalité

Hypothèses	Isométries
$\begin{cases} x(\phi(t)) = -x(t) \\ y(\phi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à O
$\begin{cases} x(\phi(t)) = -x(t) \\ y(\phi(t)) = y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à (Oy)
$\begin{cases} x(\phi(t)) = x(t) \\ y(\phi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à (Ox)
$\begin{cases} x(\phi(t)) = y(t) \\ y(\phi(t)) = x(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à la première bissectrice
$\begin{cases} x(\phi(t)) = x(t) + a \\ y(\phi(t)) = y(t) + b \end{cases}$	Translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Point Méthode

- Déterminer le domaine de définition de f
- Déterminer le domaine d'étude réduit $\mathcal{D}_1$, et décrire les transformations géométriques, permettant de déduire toute la courbe de la partie construite
- Etudier les variations de x et de y sur $\mathcal{D}_1$
- Etudier la forme de la courbe au voisinage des points stationnaires
- Etudier les branches infinies et déterminer les asymptotes éventuelles ainsi que leurs positions par rapport à la courbe
- Tracer l'allure de la courbe en utilisant les résultats précédents : tangentes parallèles aux axes, points stationnaires, branches infinies, évolution du point $M(t)$ lorsque t décrit $\mathcal{D}_1$, translations et symétries.

Application

Exercice n°4

1. $$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x(t) = 2t + \dfrac{1}{2t+1} \\ y(t) = t^2 - \dfrac{1}{2t+1} \end{cases}$$